

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ

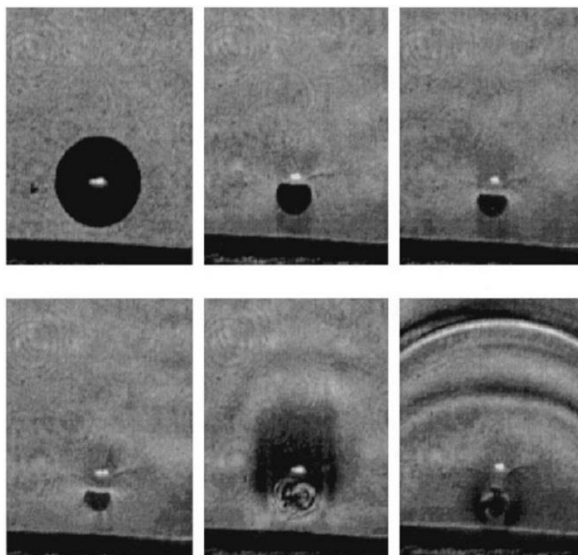
Μεταπτυχιακή Εργασία:

**Μελέτη αλληλεπίδρασης φουσαλίδας χωρίς περίβλημα με
γειτονικό τοίχωμα παρουσία ακουστικών διαταραχών με
δημιουργία αξονοσυμμετρικού κώδικα συνοριακών
στοιχείων**

υπό

Ευθυμίου Κωνσταντίνου

Διπλωματούχου Μηχανολόγου Μηχανικού Π.Θ.



υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των
απαιτήσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Εξειδίκευσης
του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Βόλος 2014

© 2014 Ευθυμίου Κωνσταντίνος

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

1^{ος} Εξεταστής
(Επιβλέπων)

Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

2^{ος} Εξεταστής

Δρ. Παπαθανασίου Αθανάσιος
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

3^{ος} Εξεταστής

Δρ. Μποντόζογλου Βασίλειος
Καθηγητής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω το Θεό που με αξίωσε να φτάσω στο σημείο να αποκτήσω τον 3^ο τίτλο σπουδών μου και στάθηκε νοερά δίπλα μου σε κάθε μέρα της ζωής μου. Εν συνεχεία, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Νικόλαο Πελεκάση για την επιστημονική του καθοδήγηση και για την υπομονή, επιμονή και εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθ' όλη τη διάρκεια της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας. Επίσης, να ευχαριστήσω θερμά τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Παπαθανασίου Αθανάσιο και τον Καθηγητή κ. Μποντόζογλου Βασίλειο για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις τους στο να γίνει η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία αρτιότερη. Ακολούθως να ευχαριστήσω τους γονείς μου Νικόλαο και Ευπραξία, καθώς επίσης και τους γονείς της γυναίκας μου, Ιωάννη και Ελένη, στους οποίους είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων, διότι χωρίς τη δική τους συνεισφορά, ηθική και οικονομική, θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση των σπουδών μου. Εν συνεχεία, να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου Μαρία για την κατανόησή της και την ψυχική ενδυνάμωση που μου προσέφερε σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αδερφό μου Ηλία και τον κουνιάδο μου Αναστάσιο για το ενδιαφέρον και τη συμπαράστασή τους όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, να ευχαριστήσω θερμά τον Δρ. Τσιγκλιφή Κωνσταντίνο και τη Δρ. Βλαχομήτρου Μαρία για την πολύτιμη βοήθειά τους μέσω των ιδιαίτερα καρποφόρων συζητήσεών μας όλον αυτόν τον καιρό, καθώς επίσης και τον Δρ. Δημόπουλο Δημήτριο για τη σημαντική συμπαράσταση και το ενδιαφέρον του.

Αφιερώνω αυτή την εργασία σε όλους τους δικούς μου ανθρώπους.

Ευθυμίου Κωνσταντίνος

Μελέτη αλληλεπίδρασης φυσαλίδας χωρίς περίβλημα με γειτονικό τοίχωμα παρουσία ακουστικών διαταραχών με δημιουργία αξονοσυμμετρικού κώδικα συνοριακών στοιχείων

Ευθυμίου Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, 2014

Επιβλέπων Καθηγητής:

Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Καθηγητής Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής

Περίληψη

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετήθηκε η αλληλεπίδραση φυσαλίδων χωρίς περίβλημα με γειτονικό στερεό τοίχωμα παρουσία ακουστικών διαταραχών. Εξετάστηκαν δύο μεγέθη φυσαλίδων: i) φυσαλίδα με ακτίνα 1 mm και ii) φυσαλίδα με ακτίνα $3.6\text{ }\mu\text{m}$. Επιβλήθηκαν δύο ειδών διαταραχές: α) βηματική αλλαγή της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού στο άπειρο και β) αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής στο άπειρο. Επιλέχθηκαν τέσσερα πλάτη διαταραχών ($\varepsilon = 0.5, 1, 2, 3$) και τρεις αρχικές αποστάσεις από το γειτονικό τοίχωμα $d = 100, 5, 1$ προκειμένου να διερευνηθεί η επίδρασή τους στις ταλαντώσεις των φυσαλίδων και στον τρόπο κατάρρευσής τους. Θεωρήθηκε αξονική συμμετρία και αναπτύχθηκε κώδικας συνοριακών στοιχείων για την υλοποίηση των προσομοιώσεων. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι η αρχική απόσταση από το γειτονικό στερεό τοίχωμα καθώς επίσης και το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής επηρεάζει τις ταλαντώσεις της φυσαλίδας και τον τρόπο κατάρρευσής της. Η μείωση της αρχικής απόστασης ενισχύει της δευτερεύουσες δυνάμεις Bjerknes κάνοντας την έλξη της φυσαλίδας προς το τοίχωμα εντονότερη. Επιπροσθέτως, για βηματική αλλαγή της πίεσης στο άπειρο, η μείωση της αρχικής απόστασης ελαττώνει τη συχνότητα ταλάντωσης της φυσαλίδας αφήνοντας ανεπηρέαστο το πλάτος ταλάντωσης, ενώ για ημιτονοειδή αλλαγή ελαττώνεται το πλάτος ταλάντωσης παραμένοντας σταθερή η συχνότητά της. Για μεγάλες αποστάσεις από το τοίχωμα παρατηρείται υποαρμονικός συντονισμός υψηλών σφαιρικών αρμονικών, κυρίως συμμετρικών, με τις ταλαντώσεις όγκου της φυσαλίδας με αποτέλεσμα η

ιδιομορφή να αποτυπώνεται στο σχήμα της φυσαλίδας κατά τα τελευταία στάδια της προσομοίωσης. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει δημιουργία περιοχών πολύ μεγάλης καμπυλότητας, οι οποίες οδηγούν σε διάσπαση της φυσαλίδας σε μικρότερες. Αντιθέτως, για μικρές αποστάσεις αναπτύσσονται μη συμμετρικές ιδιομορφές, οι οποίες οδηγούν στη δημιουργία υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας (jet) στο τμήμα της φυσαλίδας που βρίσκεται μακρύτερα από το τοίχωμα και η οποία διασχίζει τον άξονα συμμετρίας της φυσαλίδας με κατεύθυνση προς το τοίχωμα. Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται τελικά φυσαλίδα τοροειδούς μορφής. Αύξηση του πλάτους της εξωτερικής διαταραχής εντείνει και επισπεύδει τα φαινόμενα. Επιπροσθέτως, για βηματική αλλαγή της πίεσης παρατηρείται αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης της φυσαλίδας, ενώ για αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής η συχνότητα παραμένει αμετάβλητη. Για τις φυσαλίδες τάξεως μικρομέτρων χρειάζονται μεγαλύτερα πλάτη διαταραχών, από τις αντίστοιχες τάξεως χιλιοστών, προκειμένου να εμφανίσουν jet, το οποίο δημιουργείται και αναπτύσσεται εξ ολοκλήρου στη φάση συστολής, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες τάξεως χιλιοστών στις οποίες η ανάπτυξη του jet γίνεται στη φάση διαστολής. Τέλος, οι πρώτες, για βηματική αλλαγή της πίεσης στο περιβάλλον ρευστό, δε διατηρούν το σφαιρικό τους σχήμα στο τμήμα που βρίσκεται απέναντι από το τοίχωμα, σε αντίθεση με τις δεύτερες που το διατηρούν.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Κίνητρο και υπόβαθρο	1
1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση	3
1.3 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας.....	10
2. Θεωρητική Ανάλυση.....	12
2.1 Διατύπωση του προβλήματος – Μοντελοποίηση της μικροφυσαλίδας.....	12
2.2 Περιγραφή της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας κατά Lagrange.....	14
2.3 Ολοκληρωτική εξίσωση της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας	17
2.4 Συνολική ενέργεια του συστήματος.....	19
3. Αριθμητική Επίλυση	21
3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	21
3.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων	22
3.3 Χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων	24
3.4 Αλγόριθμος επίλυσης.....	26
3.5 Αξιοπιστία της Αριθμητικής Μεθοδολογίας.....	26
4. Αριθμητικά Αποτελέσματα	32
4.1 Φυσαλίδα ακτίνας τάξεως χιλιοστών.....	32
4.1.1 Βηματική αλλαγή της πίεσης.....	33
4.1.2 Αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής.....	36
4.2 Φυσαλίδα ακτίνας τάξεως μικρομέτρων.....	39
4.2.1 Βηματική αλλαγή της πίεσης.....	39
4.2.2 Αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής.....	41
5. Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα	43
<i>Αναφορές – Βιβλιογραφία.....</i>	<i>46</i>

Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 1- 1: Χρονική εξέλιξη των σχημάτων των δύο φουσαλίδων κατά την έλξη (αριστερά) ή την άπωσή τους (δεξιά).	3
Εικόνα 1- 2: Χρονική εξέλιξη σχημάτων της φουσαλίδας που βρίσκεται κοντά σε στερεό σύνορο και η δημιουργία jet στη φάση κατάρρευσής της.	4
Εικόνα 1- 3: Χρονική εξέλιξη σχημάτων τοροειδούς φουσαλίδας που βρίσκεται κοντά σε στερεό σύνορο. Απεικονίζεται η εικονική καμπύλη που συνδέει τα δύο μέρη του τόρου.	4
Εικόνα 1- 4: Στιγμιότυπα της κίνησης της φουσαλίδας και της δημιουργίας jet στη φάση κατάρρευσης.	5
Εικόνα 1- 5: Στιγμιότυπα της κίνησης της φουσαλίδας κατά τη φάση της συντριβής της πάνω στη στερεή επιφάνεια. Αριθμητική προσομοίωση (πάνω), πειραματικές εικόνες (κάτω).	6
Εικόνα 1- 6: Το τελικό στάδιο κατάρρευσης της φουσαλίδας κοντά σε στερεό σύνορο. (a) Φωτογραφίες από κάμερα υψηλής ταχύτητας. Το στερεό σύνορο είναι στην πάνω πλευρά της κάθε φωτογραφίας. (b) Αντίστοιχα στιγμιότυπα από την υπολογιστική μελέτη για τις δύο πρώτες σειρές φωτογραφιών.	7
Εικόνα 1- 7: Στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φουσαλίδας με ελεύθερη επιφάνεια. (a) Φωτογραφίες από κάμερα υψηλής ταχύτητας μίας φουσαλίδας πολύ κοντά σε ελεύθερη επιφάνεια, (b) στιγμιότυπα από την υπολογιστική μελέτη στη φάση διαστολής της φουσαλίδας, (c) αντίστοιχα στιγμιότυπα στη φάση κατάρρευσης, (d), κίνηση του κέντρου μάζας της φουσαλίδας ως προς την ελεύθερη επιφάνεια, (e)-(f)-(g) απεικόνιση του πεδίου πίεσης σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές.	8
Εικόνα 1- 8: Στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φουσαλίδας με στερεό σύνορο. Απεικονίζεται η ανάπτυξη του jet, η παραγωγή του τοροειδούς σχήματος και το τελικό στάδιο της κατάρρευσης.	9
Εικόνα 1- 9: Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φουσαλίδας με αγγείο. (a) Μια ομάδα από φουσαλίδες μέσα στο αγγείο οι οποίες προκαλούν τη διαστολή του (κέντρο) και την επακόλουθη εγκόλπωση του τοιχώματος (δεξιά), (b) διαστολή του αγγείου από την ύπαρξη φουσαλίδας κοντά στο τοίχωμα (κέντρο) και η δημιουργία jet στη φουσαλίδα με κατεύθυνση αντίθετα του τοιχώματος.	10
Εικόνα 2- 1: Σχηματική απεικόνιση φουσαλίδας χωρίς περίβλημα κοντά σε στερεό τοίχωμα.	12
Εικόνα 2- 2: Σχηματική απεικόνιση του συστήματος φουσαλίδα – φουσαλίδα.	13

Κατάλογος διαγραμμάτων

Διάγραμμα 3- 1: Χρονική εξέλιξη σχήματος των δύο φουσαλίδων στο τελικό στάδιο της προσομοίωσης, για $d^*=4\text{mm}$. Αποτέλεσμα προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχο γράφημα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).....	27
Διάγραμμα 3- 2: Διαγράμματα ταλαντώσεων όγκου της αριστερής φουσαλίδας και της χρονικής εξέλιξης των κέντρων μάζας των δύο φουσαλίδων, για $d^*=4\text{mm}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (πάνω), αντίστοιχα διαγράμματα από τη βιβλιογραφία (κάτω).	27
Διάγραμμα 3- 3: Χρονική εξέλιξη σχήματος των δύο φουσαλίδων στο τελικό στάδιο της προσομοίωσης, για $d^*=8\text{mm}$. Αποτέλεσμα προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχο γράφημα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).....	28
Διάγραμμα 3- 4: Χρονική μεταβολή των συντελεστών Legendre c_0 , c_2 και c_{10} , για $d^*=8\text{mm}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (πάνω), αντίστοιχα αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία (κάτω).	28
Διάγραμμα 3- 5: Διαγράμματα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας για $d^*=4\text{mm}$ (αριστερά) και $d^*=8\text{mm}$ (δεξιά).....	29
Διάγραμμα 3- 6: Χρονική μεταβολή των συντελεστών Legendre c_0 , c_2 και c_9 , για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=152\text{ Hz}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (πάνω), αντίστοιχα αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία (κάτω).	29
Διάγραμμα 3- 7: Χρονική εξέλιξη σχήματος των δύο φουσαλίδων στο τελικό στάδιο της προσομοίωσης, για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=1503\text{ Hz}$. Αποτέλεσμα προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχο γράφημα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).	30
Διάγραμμα 3- 8: Διαγράμματα ταλαντώσεων όγκου της φουσαλίδας, για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=1503\text{ Hz}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχα διαγράμματα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).....	30
Διάγραμμα 3- 9: Διαγράμματα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=152\text{ Hz}$ (αριστερά) και $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=1503\text{ Hz}$ (δεξιά).....	30
Διάγραμμα 4- 1: Σχήμα των φουσαλίδων στο τελευταίο στάδιο της προσομοίωσης (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος των φουσαλίδων (δεξιά).....	32
Διάγραμμα 4- 2: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=100$	33
Διάγραμμα 4- 3: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=5$	33

Διάγραμμα 4- 4: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=1$	34
Διάγραμμα 4- 5: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).	36
Διάγραμμα 4- 6: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=100$	36
Διάγραμμα 4- 7: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=5$	37
Διάγραμμα 4- 8: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).	37
Διάγραμμα 4- 9: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=3$ και $d=1$	39
Διάγραμμα 4- 10: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=1$	39
Διάγραμμα 4- 11: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=3$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).	40
Διάγραμμα 4- 12: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).	41
Διάγραμμα 4- 13: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φουσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φουσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=3$ και $d=1$	42

1. Εισαγωγή

1.1 Κίνητρο και υπόβαθρο

Οι ταλαντώσεις φυσαλίδας και η κατάρρευσή της είναι ένα πεδίο έρευνας ενεργό από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα, όταν ο Lord Rayleigh [1] μελέτησε για πρώτη φορά την αυθόρμητη δημιουργία και κατάρρευση φυσαλίδων, σε μία προσπάθεια να εξηγήσει τη ζημιά που προκαλείται στις προπέλες πλοίων και υποβρυχίων που κινούνται με υψηλή ταχύτητα. Περιέγραψε τη διαδικασία της σπηλαίωσης, κατά την οποία δημιουργούνται φυσαλίδες, σαν αποτέλεσμα των αλλαγών στο τοπικό πεδίο πίεσης. Οι φυσαλίδες που δημιουργούνται ακουστικά μπορούν να ταλαντώνονται αρκετά βίαια και στη συνέχεια να καταρρέουν καταστρέφοντας την επιφάνεια της προπέλας μέσω του κύματος πίεσης που εκπέμπουν. Αυτός είναι ένας σφαιροσυμμετρικός μηχανισμός κατάρρευσης που περιγράφεται από τις γνωστές Rayleigh – Plesset εξισώσεις και σχετίζεται με την εκπομπή ήχου κατά τα τελευταία στάδια.

Η κατάρρευση αξονοσυμμετρικής φυσαλίδας εξετάστηκε αργότερα [2], [3] προκειμένου να εκτιμηθεί η καταστρεπτική επίδραση του σχηματισμού υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας «jet» κατά τη διάρκεια της κατάρρευσης κοντά σε ένα στερεό όριο. Αυτό διευκολύνθηκε καταφεύγοντας στην ολοκληρωτική συνοριακή αναπαράσταση που απαιτεί διακριτοποίηση της διεπιφάνειας φυσαλίδας-υγρού και των δύσκαμπτων ή ελεύθερων συνόρων που αλληλεπιδρούν με τη φυσαλίδα και όχι με ολόκληρο το πεδίο της ροής. Αυτό είναι φυσικά δυνατό στην περιοχή της δυναμικής ροής που είναι εφαρμόσιμη στην περίπτωση των φυσαλίδων που καταρρέουν. Η καταστροφική επίδραση κρουστικού κύματος που δημιουργείται από την κατάρρευση της φυσαλίδας ή του jet που σχηματίζεται κατά τη διάρκεια ασύμμετρης κατάρρευσης, έχουν παρατηρηθεί και επαληθευτεί πειραματικά [4], [5] με φωτογραφίες υψηλής ταχύτητας και είναι γνωστό ότι αμφότερα συνεισφέρουν σε πλαστική παραμόρφωση του υλικού. Πρόσφατες εξελίξεις σε υπολογιστικές και κινηματογραφικές τεχνικές παρατηρήσεις έχουν προσφέρει στην καταγραφή λεπτομερειών της κατάρρευσης και ειδικότερα στο σχηματισμό τοροειδών [6], [7] φυσαλίδων ως συνέπεια της δημιουργίας jet κοντά σε στερεό σύνορο.

Σήμερα, η ταλάντωση φυσαλίδας και η κατάρρευσή της είναι ο βασικός παράγοντας για μια σειρά εφαρμογών σε πολλούς τομείς της τεχνολογίας. Η σπηλαίωση αδράνειας που δημιουργείται από γρήγορη ταλάντωση και κατάρρευση μίας ελεύθερης φυσαλίδας, μπορεί να συμβεί σε συσκευές, όπως οι προπέλες και οι αντλίες, προκαλώντας μεγάλο θόρυβο, βλάβη εξαρτημάτων, δονήσεις και μείωση της απόδοσης. Αν και η σπηλαίωση είναι ανεπιθύμητο φαινόμενο σε πολλές περιπτώσεις, αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα, η υπερ-σπηλαίωση

χρησιμοποιείται, σε ερευνητικό επίπεδο, ως ένα μέσο για τη δημιουργία νέφους φυσαλίδων σπηλαίωσης οι οποίες περιβάλλουν υποβρύχια οχήματα μειώνοντας ή και εξαλείφοντας την επαφή τους με το νερό. Τέτοια οχήματα μπορούν να ταξιδεύουν σημαντικά ταχύτερα από τα συμβατικά υποβρύχια.

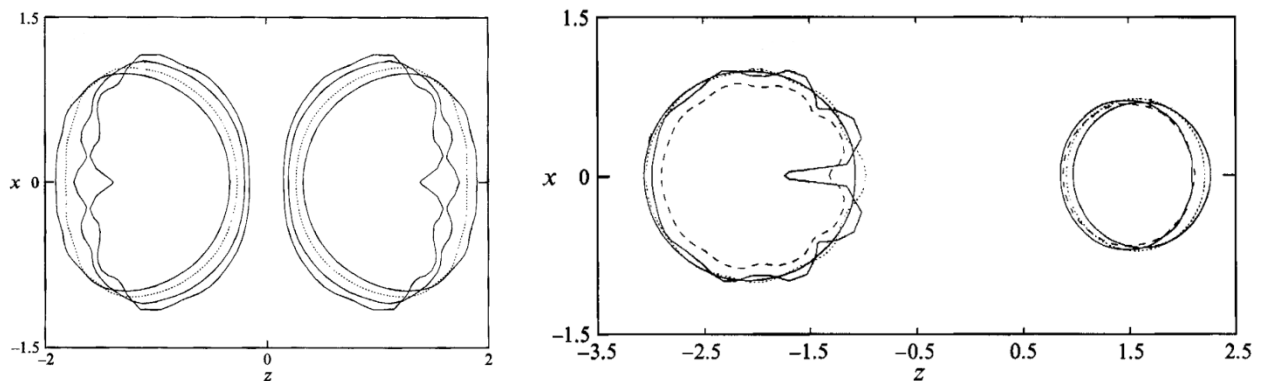
Η σπηλαίωση μπορεί να είναι επίσης χρήσιμη σε συσκευές καθαρισμού που λειτουργούν με υπέρηχους. Αυτές οι συσκευές προκαλούν σπηλαίωση χρησιμοποιώντας ηχητικά κύματα και εκμεταλλεύονται την κατάρρευση των φυσαλίδων σπηλαίωσης για να καθαρίζουν επιφάνειες μέσω κρουστικών κυμάτων ή μέσω της επίδρασης των jet. Με τη συγκεκριμένη χρήση, η ανάγκη για μερικά περιβαλλοντολογικά επιβλαβή χημικά μπορεί να μειωθεί σε πολλές βιομηχανικές και εμπορικές διαδικασίες που απαιτούν καθαρισμό επιφανειών. Στη βιομηχανία, η σπηλαίωση συχνά χρησιμοποιείται για να ομογενοποιήσει, να αναμίξει και να σπάει αιωρούμενα σωματίδια σε κολλοειδείς ενώσεις υγρού, όπως μίγματα χρωμάτων ή γάλα. Πολλές βιομηχανικές μηχανές ανάμιξης βασίζονται σε αυτή την αρχή του σχεδιασμού. Επίσης, συσκευές καθαρισμού με σπηλαίωση μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διάσπαση ρύπων και οργανικών μορίων. Η φασματική ανάλυση του φωτός που εκπέμπεται σε Sonochemical αντιδράσεις αποκαλύπτει την ύπαρξη χημικών ουσιών και ιονισμένου πλάσματος, που παίζουν καθοριστικό ρόλο στο μηχανισμό μεταφοράς ενέργειας κατά την αδιαβατική κατάρρευση μικροφυσαλίδων. Το φαινόμενο εκπομπής φωτός από φυσαλίδες σπηλαίωσης ονομάζεται sonoluminescence και έχει μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία [8], [9], [10]. Από την άλλη πλευρά είναι επίσης γνωστό ότι ο σχηματισμός jet λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια ακόμα και μίας ήπιας κατάρρευσης μη σφαιρικής φυσαλίδας, τόσο από πειραματικές [11], [12], όσο και από αριθμητικές μελέτες [13], [14], χωρίς να συνδέεται με την εκπομπή φωτός. Όμως η ελεγχόμενη δημιουργία jet έχει σημαντική εφαρμογή τόσο στην μικροχειρουργική [15], [16], με τη δημιουργία οπών σε γειτονικά κύτταρα σαν αποτέλεσμα των ταλαντώσεων μικροφυσαλίδων, όσο και στην μικρορευστομηχανική γενικότερα [17]. Τέλος, η σπηλαίωση παίζει επίσης σημαντικό ρόλο για την καταστροφή της πέτρας στα νεφρά σε λιθοτριψία με κρουστικά κύματα που αναπτύσσονται μέσω της κατάρρευσης μικροφυσαλίδων.

Σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές κεντρικό ρόλο παίζει η δυνατότητα εντοπισμού τοπικά και χρονικά σημαντικού ποσού μηχανικής ενέργειας μέσω της κατάρρευσης των ταλαντευόμενων μικροφυσαλίδων. Η κατανόηση της δυναμικής συμπεριφοράς και ο επακόλουθος έλεγχος αυτής της διαδικασίας διευρύνουν σημαντικά το πεδίο εφαρμογών του φαινομένου της σπηλαίωσης.

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση

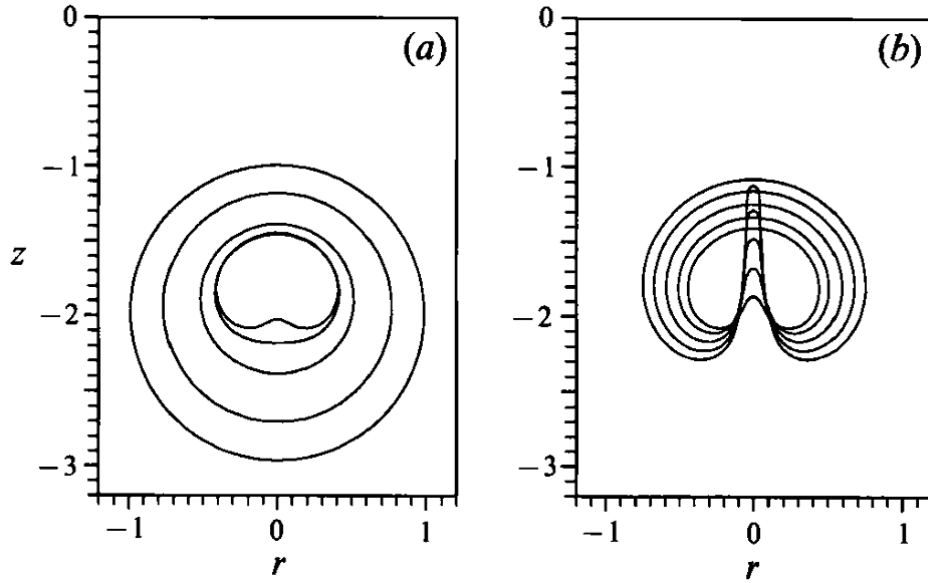
Τις τελευταίες τρεις δεκαετίες έχουν γίνει πολλές και σημαντικές μελέτες για τη δυναμική συμπεριφορά φυσαλίδων χωρίς περίβλημα, όταν αυτές βρίσκονται μόνες τους βυθισμένες σε ρευστό, καθώς επίσης και για την αλληλεπίδρασή τους με άλλη φυσαλίδα ή με γειτονικό σύνορο.

Οι Pelekasis και Tsamopoulos [18], [19] μελέτησαν την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο φυσαλίδων βυθισμένες σε νερό, όταν αυτές υπόκεινται σε βηματική αλλαγή της υδροστατικής πίεσης, καθώς επίσης και σε αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής. Η μελέτη έγινε με χρήση υβριδικής μεθόδου συνοριακών – πεπερασμένων στοιχείων για τον υπολογισμό του σχήματος των διεπιφανειών των δύο φυσαλίδων και του δυναμικού της ταχύτητας στις διεπιφάνειες. Παρατηρήθηκε ότι όταν οι δύο φυσαλίδες ταλαντώνονται σε φάση, τότε αυτές έλκονται, ενώ εκτός φάσης απωθούνται. Αυτό οφείλεται στις δευτερεύουσες δυνάμεις Bjerknes που αναπτύσσονται μεταξύ των δύο φυσαλίδων. Οι φυσαλίδες παραμορφώνονται έντονα, είτε λόγω ασταθειών Rayleigh – Taylor, είτε λόγω υποαρμονικού συντονισμού μεταξύ των ταλαντώσεων όγκου των δύο φυσαλίδων και βασικών μη-σφαιρικών αρμονικών. Και στις δύο περιπτώσεις οι δύο φυσαλίδες καταρρέουν λόγω ισχυρής επιφανειακής παραμόρφωσης.



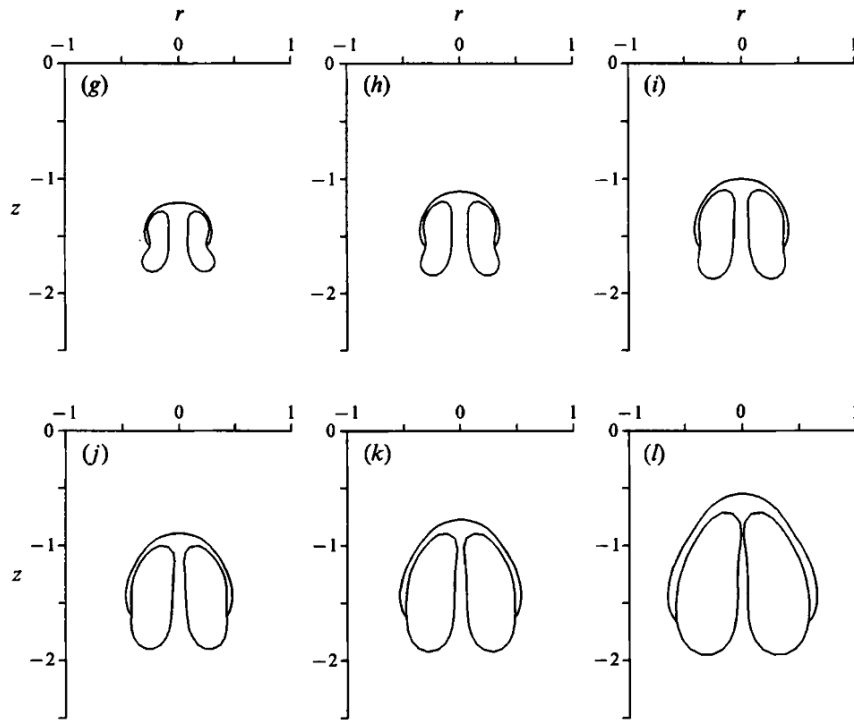
Εικόνα 1- 1: Χρονική εξέλιξη των σχημάτων των δύο φυσαλίδων κατά την έλξη (αριστερά) ή την άπωσή τους (δεξιά).

Οι Best και Kucera [20] μελέτησαν την κίνηση φυσαλίδων υπό την επίδραση της άνωσης κοντά σε γειτονικό στερεό σύνορο με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων, υποθέτοντας αξονική συμμετρία. Έγινε χρήση της αρχής του παλμού Kelvin και βρέθηκε ότι στο στάδιο κατάρρευσης της φυσαλίδας δημιουργείται jet, το οποίο τείνει να διαχωρίσει τη φυσαλίδα σε δύο μικρότερες. Υπήρξαν όμως και περιπτώσεις όπου το μη-συμπυκνώσιμο αέριο στο εσωτερικό της φυσαλίδας αναστέλλει την πορεία του jet, με αποτέλεσμα το τελευταίο να αναπτύσσεται τελικά στη φάση διαστολής.



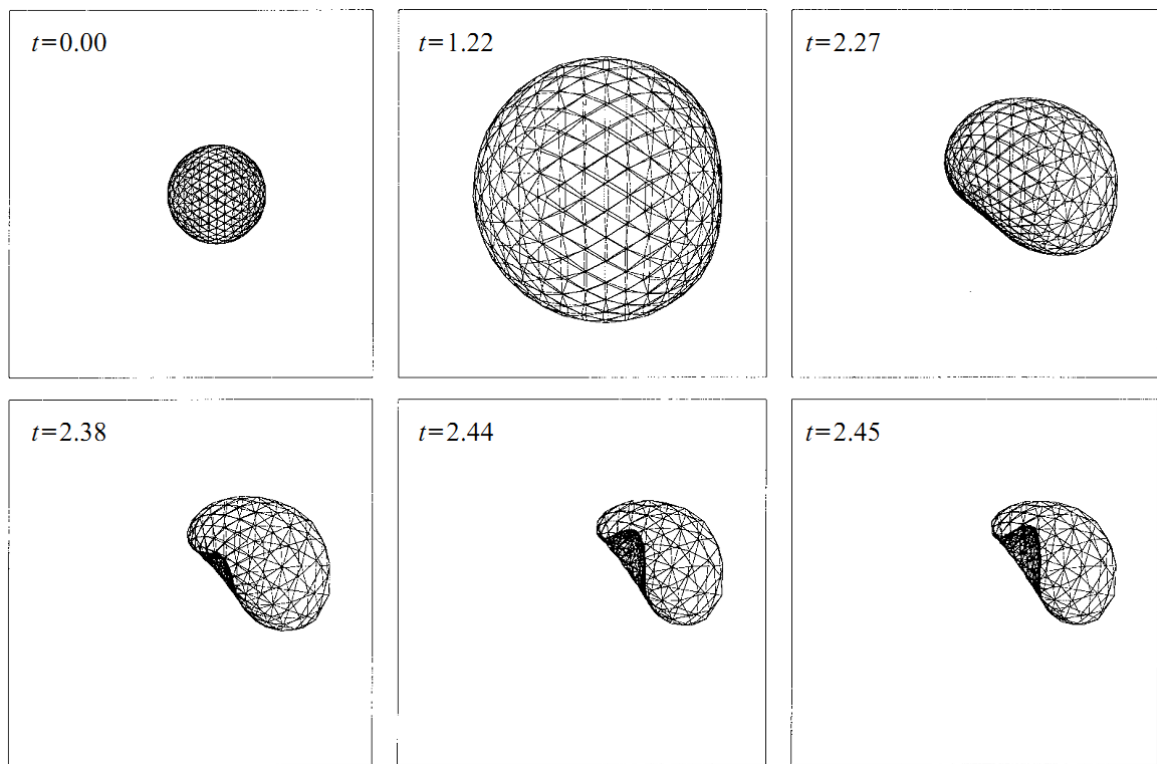
Εικόνα 1- 2: Χρονική εξέλιξη σχημάτων της φυσαλίδας που βρίσκεται κοντά σε στερεό σύνορο και η δημιουργία jet στη φάση κατάρρευσής της.

Επιπλέον, ο Best [14] μελέτησε την εξέλιξη του jet και τη δημιουργία τοροειδούς φυσαλίδας, ενώ το πεδίο ροής θεωρείται πλέον διπλά συνεκτικό. Η κίνηση της φυσαλίδας υπολογίστηκε με χρήση συνοριακών στοιχείων εισάγοντας μία εικονική καμπύλη που συνδέει τα δύο κομμάτια του τόρου επιτρέποντας την συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση να γραφεί σε χωρίο απλής συνοχής.



Εικόνα 1- 3: Χρονική εξέλιξη σχημάτων τοροειδούς φυσαλίδας που βρίσκεται κοντά σε στερεό σύνορο. Απεικονίζεται η εικονική καμπύλη που συνδέει τα δύο μέρη του τόρου.

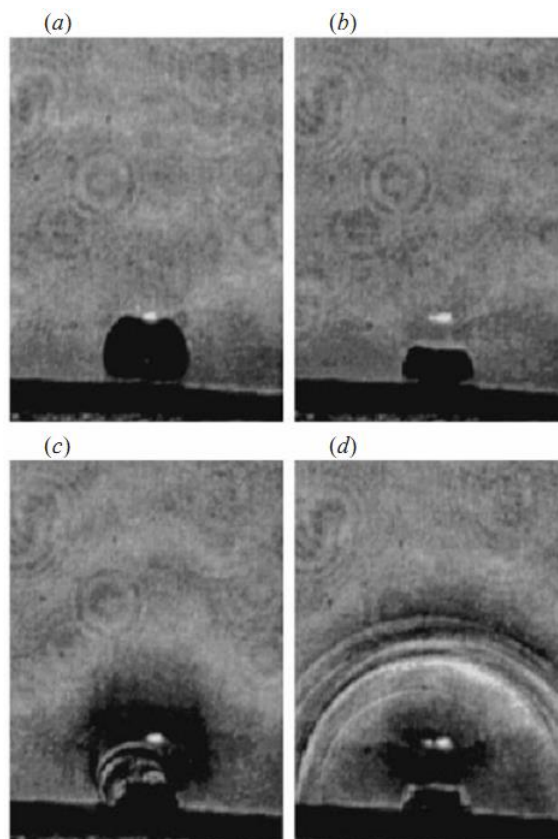
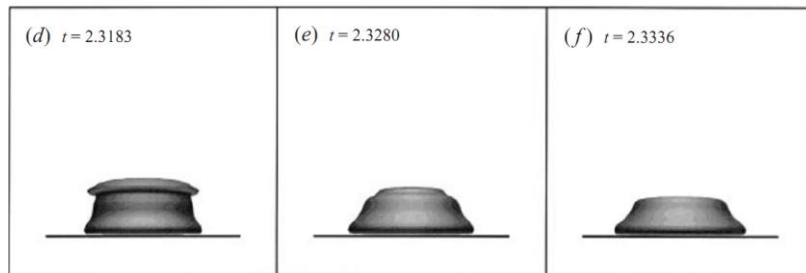
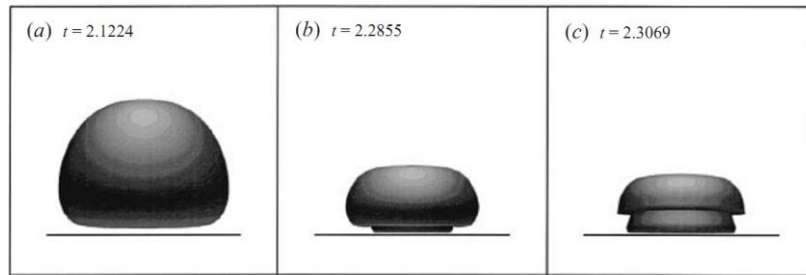
Οι Blake et al. [13] προσπάθησαν να διερευνήσουν τους παράγοντες που επηρεάζουν το σχηματισμό και τη διεύθυνση του υγρού jet σε φυσαλίδα στο στάδιο της κατάρρευσης, καθώς επίσης και το πεδίο πίεσης που δημιουργεί στην περιοχή κοντά σε στερεό σύνορο. Χρησιμοποιήθηκε η θεωρία δυναμικής ροής και η υπολογιστική μελέτη υλοποιήθηκε με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Σε αυτή την περίπτωση δεν υποτέθηκε αξονική συμμετρία και οι υπολογισμοί έγιναν για πλήρως τρισδιάστατη γεωμετρία. Η συγκεκριμένη μελέτη επεκτάθηκε για να μοντελοποιήσει τη φάση ανάπτυξης και κατάρρευσης φυσαλίδων σπηλαίωσης και να ερευνήσει τα αίτια της καταστροφικής τους συμπεριφοράς σε διάφορα μηχανικά μέρη σύγχρονων διατάξεων. Για την καλύτερη κατανόηση της μηχανικής των φυσαλίδων χρησιμοποιήθηκε η αρχή του παλμού Kelvin.



Εικόνα 1- 4: Στιγμιότυπα της κίνησης της φυσαλίδας και της δημιουργίας jet στη φάση κατάρρευσης.

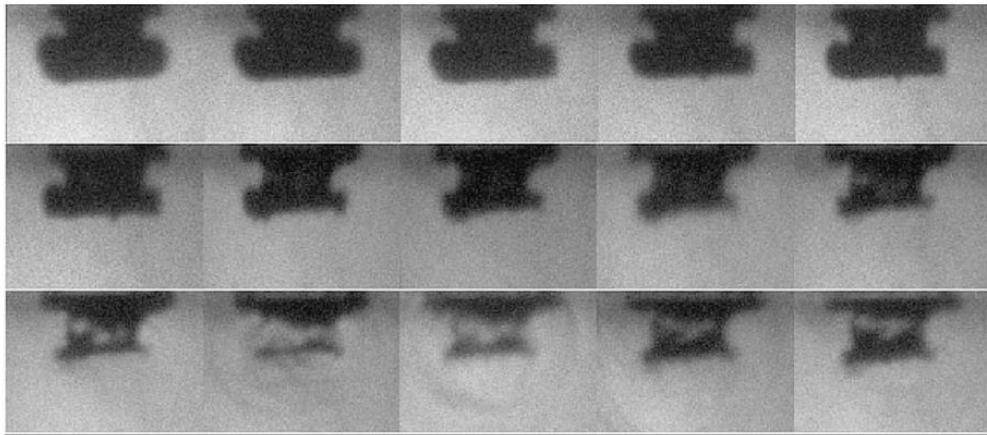
Οι Tong et al. [21] ασχολήθηκαν με φυσαλίδες ατμού μέσα σε ροή υγρού κοντά σε στερεή επιφάνεια. Εδώ και αρκετά χρόνια, αυτές οι φυσαλίδες έχουν συσχετιστεί με τις ζημιές που προκαλεί η σπηλαίωση σε μηχανολογικές κατασκευές. Στην συγκεκριμένη δημοσίευση μελετήθηκε η κίνηση της φυσαλίδας εντός ασυμπίεστου ρευστού σε ηρεμία, κοντά σε στερεό τοίχωμα και κυρίως το στάδιο κατά το οποίο η φυσαλίδα πλησιάζει σε απειροστή απόσταση την επιφάνεια, με αποτέλεσμα τη συντριβή της πάνω στην τελευταία (splashing). Οι αριθμητικές προσομοιώσεις έγιναν με χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Παρατηρήθηκε ότι η υδροδυναμική πίεση που παράγεται από τη συντριβή της φυσαλίδας είναι κατά πολύ μεγαλύτερη

από εκείνη που προκαλεί η υγρή δέσμη υψηλής ταχύτητας (jet). Η υπολογιστική δουλειά συνοδεύτηκε κι από εργαστηριακά πειράματα.

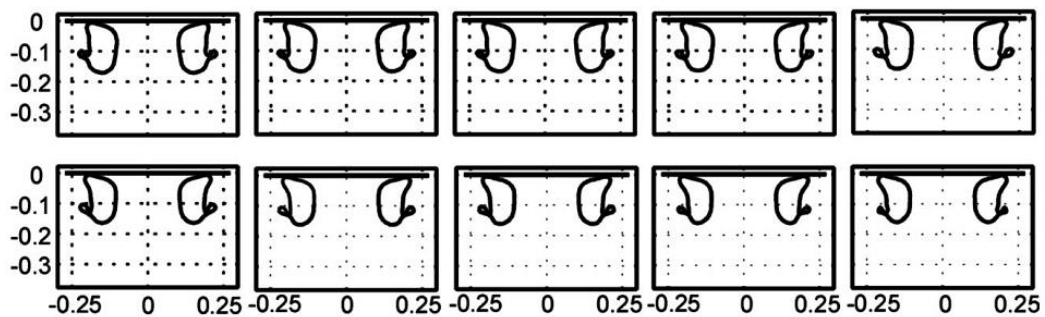


Εικόνα 1- 5: Στιγμιότυπα της κίνησης της φυσαλίδας κατά τη φάση της συντριβής της πάνω στη στερεή επιφάνεια. Αριθμητική προσομοίωση (πάνω), πειραματικές εικόνες (κάτω).

Οι Brujan et al. [22] μελέτησαν θεωρητικά/υπολογιστικά και πειραματικά το τελευταίο στάδιο της κατάρρευσης φυσαλίδας, η οποία έχει παραχθεί μέσω παλμού laser, κοντά σε γειτονικό στερεό τοίχωμα. Η χρονική εξέλιξη του jet, που αναπτύσσεται κατά τη φάση κατάρρευσης της φυσαλίδας, η εκπομπή κρουστικού κύματος και η συμπεριφορά της φυσαλίδας κατά τη συντριβή της πάνω στην στερεή επιφάνεια παρατηρήθηκαν με κάμερα υψηλής ταχύτητας (5×10^6 fps). Η αριθμητική μελέτη έγινε με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων θεωρώντας ασυμπίεστο, ανιζώδες, περιβάλλον ρευστό. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήθηκε ότι το jet, που δημιουργείται κατά τη φάση κατάρρευσης, κινείται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της φυσαλίδας με αποτέλεσμα το σχηματισμό τόρου. Η ροή του jet είναι πλέον κατά μήκος του στερεού συνόρου και έρχεται σε σύγκρουση με τη ροή που παράγεται από την κίνηση της τοροειδούς φυσαλίδας. Το αποτέλεσμα είναι η ροή να ανακατευθυνθεί κατά μήκος της πλευρικής επιφάνειας της φυσαλίδας απομακρυνόμενη από τη στερεή επιφάνεια. Αυτό οδηγεί σε απότομη κίνηση του μέρους της φυσαλίδας που βρίσκεται εγγύτερα στο τοίχωμα και στη δημιουργία φυσαλίδας σχήματος «μανιταριού». Το κομμάτι της τελευταίας που βρίσκεται μακρύτερα από το στερεό σύνορο καταρρέει πρώτο εκπέμποντας ένα κρουστικό κύμα.



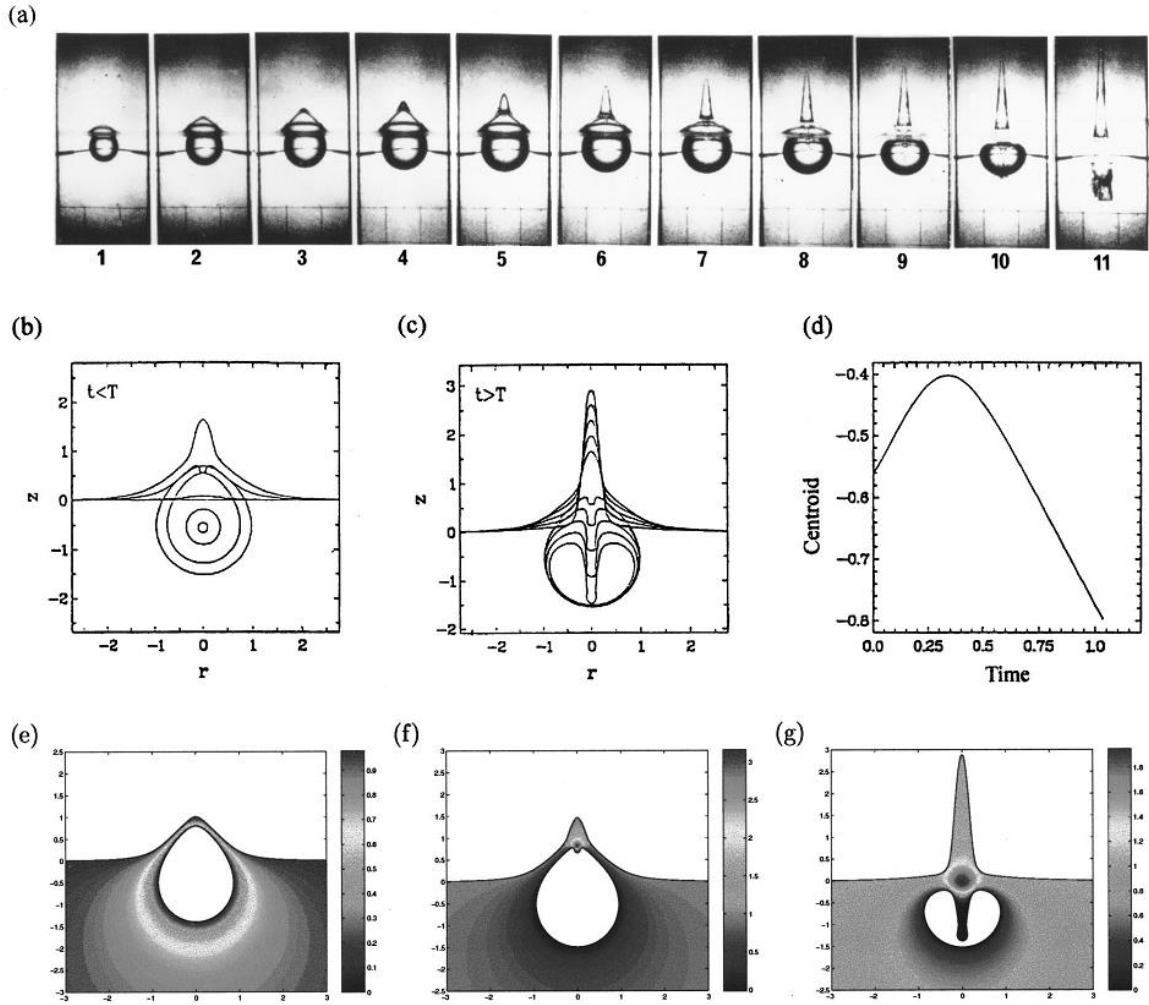
(a)



(b)

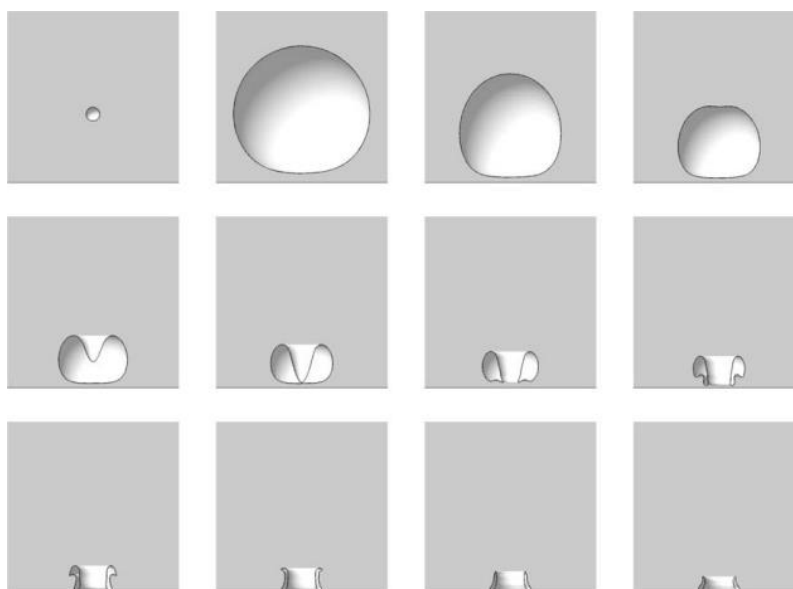
Εικόνα 1- 6: Το τελικό στάδιο κατάρρευσης της φυσαλίδας κοντά σε στερεό σύνορο. (a) Φωτογραφίες από κάμερα υψηλής ταχύτητας. Το στερεό σύνορο είναι στην πάνω πλευρά της κάθε φωτογραφίας. (b) Αντίστοιχα στιγμιότυπα από την υπολογιστική μελέτη για τις δύο πρώτες σειρές φωτογραφιών.

Οι Robinson et al. [23] ασχολήθηκαν με την αλληλεπίδραση φυσαλίδων σπηλαίωσης με ελεύθερη επιφάνεια. Η μελέτη τους ήταν θεωρητική με χρήση της μεθόδου συνοριακών στοιχείων και πειραματική με χρήση κάμερας υψηλής ταχύτητας. Μελετήθηκε η κίνηση μίας, αλλά και δύο φυσαλίδων πολύ κοντά σε ελεύθερη επιφάνεια. Παρατηρήθηκε ότι στη φυσαλίδα που βρίσκεται εγγύτερα στην ελεύθερη επιφάνεια δημιουργείται jet στην πλευρά που βλέπει την τελευταία. Επίσης, βρέθηκε ότι όταν η αλληλεπίδραση της ελεύθερης επιφάνειας με τη φυσαλίδα είναι ισχυρή, τότε στην πρώτη εμφανίζεται μια έντονα αιχμηρή κορυφή. Αυτό συμβαίνει είτε υπάρχει μία είτε δύο φυσαλίδες κοντά στην επιφάνεια.



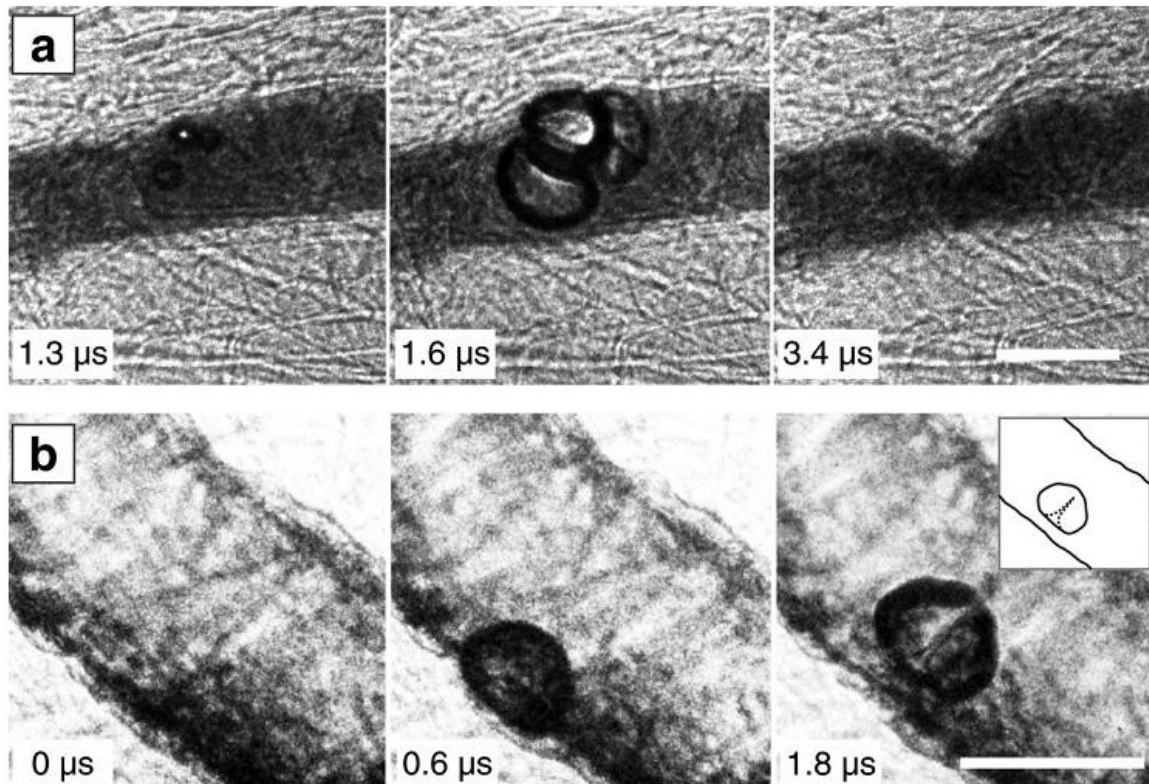
Εικόνα 1- 7: Στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με ελεύθερη επιφάνεια. (a) Φωτογραφίες από κάμερα υψηλής ταχύτητας μίας φυσαλίδας πολύ κοντά σε ελεύθερη επιφάνεια, (b) στιγμιότυπα από την υπολογιστική μελέτη στη φάση διαστολής της φυσαλίδας, (c) αντίστοιχα στιγμιότυπα στη φάση κατάρρευσης, (d), κίνηση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας ως προς την ελεύθερη επιφάνεια, (e)-(f)-(g) απεικόνιση του πεδίου πίεσης σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές.

Οι Pearson et al. [24] μελέτησαν τους διάφορους τύπους jet που δημιουργούνται σε φυσαλίδες που αλληλεπιδρούν με γειτονική στερεή επιφάνεια. Η μελέτη ήταν υπολογιστική με χρήση μιας αναβαθμισμένης τεχνικής συνοριακών στοιχείων, η οποία ενσωματώνει τη μετάβαση από φυσαλίδες απλής συνοχής σε πολλαπλής (π.χ. φυσαλίδες τοροειδούς σχήματος). Υπολογίστηκαν το σχήμα της φυσαλίδας, το πεδίο ταχυτήτων και πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού, η ανακυκλοφορία γύρω από τη φυσαλίδα και έγινε ένας καταμερισμός της ενέργειας σε κινητική, δυναμική και άνωσης, ενώ χρησιμοποιήθηκε η θεωρία του παλμού Kelvin για τη δημιουργία της αρχικής διαταραχής του πεδίου. Βρέθηκε ότι το 31% της συνολικής ενέργειας και το 53% της ενέργειας του παλμού Kelvin σχετίζεται με την ανάπτυξη του jet. Στις περιπτώσεις αυτές παρατηρήθηκε ότι το επίπεδο συμπίεσης της φυσαλίδας ελαττώνεται σημαντικά οδηγώντας σε χαμηλότερες θερμοκρασίες στο περιεχόμενο αέριο εντός της, με αποτέλεσμα την αλλαγή της χημικής δραστηριότητας του αερίου ή την εκπομπή φωτός. Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται η κίνηση μιας φυσαλίδας ατμού κοντά σε ένα γειτονικό στερεό τοίχωμα. Στην αρχή φαίνεται η φυσαλίδα κατά την έναρξη των υπολογισμών, στη συνέχεια ο μέγιστος όγκος της και τέλος η δημιουργία υγρής δέσμης υψηλής ταχύτητας «jet», όταν πλησιάζει κοντά στο στερεό τοίχωμα. Το jet φαίνεται να διαπερνά το κέντρο της φυσαλίδας, παράγοντας τελικά τοροειδές σχήμα και αμέσως μετά επέρχεται η κατάρρευσή της πολύ κοντά στο τοίχωμα.



Εικόνα 1- 8: Στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με στερεό σύνορο. Απεικονίζεται η ανάπτυξη του jet, η παραγωγή του τοροειδούς σχήματος και το τελικό στάδιο της κατάρρευσης.

Οι Chen et al. [25] διεξήγαγαν πειράματα σχετικά με την παραμόρφωση που προκαλούν οι φυσαλίδες σε αιμοφόρα αγγεία κάνοντας χρήση της μεθόδου φωτομικρογραφίας υψηλής ταχύτητας. Στην περίπτωση αυτή το γειτονικό σύνορο θεωρείται ελαστικό. Παρατηρήθηκε δημιουργία jet στις φυσαλίδες που κινούνταν κοντά στο τοίχωμα του αγγείου, ενώ στο τελευταίο υπήρξε αρχικά διαστολή και κατόπιν εμφανίστηκαν εγκολπώσεις. Το jet δημιουργείται απομακρυνόμενο από την ελαστική επιφάνεια του αγγείου και τείνει να διασχίσει τη φυσαλίδα κατά μήκος της διαμέτρου της.



Εικόνα 1- 9: Χαρακτηριστικά στιγμιότυπα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με αγγείο. (a) Μια ομάδα από φυσαλίδες μέσα στο αγγείο οι οποίες προκαλούν τη διαστολή του (κέντρο) και την επακόλουθη εγκόλπωση του τοιχώματος (δεξιά), (b) διαστολή του αγγείου από την ύπαρξη φυσαλίδας κοντά στο τοίχωμα (κέντρο) και η δημιουργία jet στη φυσαλίδα με κατεύθυνση αντίθετα του τοιχώματος.

1.3 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας

Το υπόλοιπο αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες που καταλαμβάνουν τα κεφάλαια 2 έως 5. Πιο συγκεκριμένα:

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται αναλυτικά το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας χωρίς περίβλημα με γειτονικό στερεό τοίχωμα, αναφέρονται οι διέπουσες εξισώσεις και οι συνοριακές συνθήκες του συστήματος, ενώ παράλληλα παρουσιάζεται η ολοκληρωτική εξίσωση για τις διεπιφάνειες φυσαλίδας – ρευστού και τοιχώματος – ρευστού. Τέλος, γίνεται αναφορά για τη συνολική ενέργεια του συστήματος φυσαλίδας – τοιχώματος.

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται αναφορά στη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και στον τρόπο που διακριτοποιούνται οι εξισώσεις που εκφράζουν τη συνέχεια των κάθετων και εφαπτομενικών ταχυτήτων καθώς επίσης και της δυναμικής συνθήκης. Κατόπιν παρουσιάζεται η μέθοδος συνοριακών στοιχείων και η διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης των διεπιφανειών φυσαλίδας – ρευστού και τοιχώματος – ρευστού. Ακολούθως περιγράφεται η χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων του συστήματος και γίνεται μια σύντομη αναφορά για τον τρόπο ανακατανομής των κόμβων του πλέγματος ανάλογα με την τοπική καμπυλότητα. Αμέσως μετά παρουσιάζεται επιγραμματικά ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος, ενώ στο τελευταίο κομμάτι παρουσιάζονται αποτελέσματα για την αξιοπιστία της αριθμητικής μεθόδου.

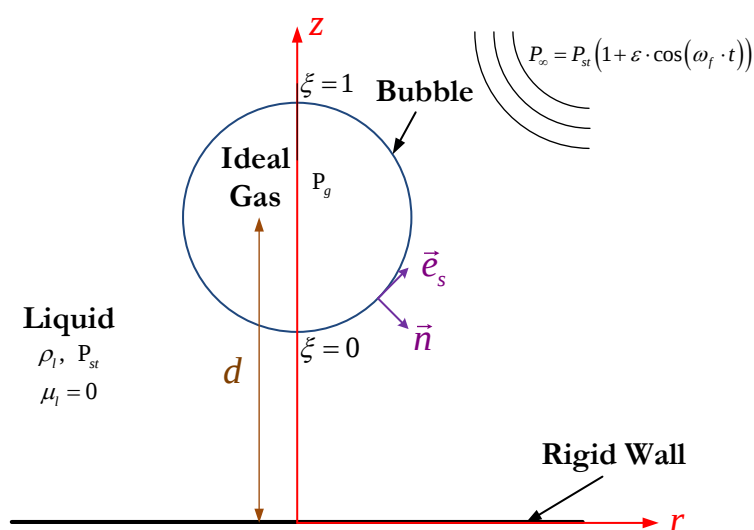
Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για φυσαλίδες με ακτίνα τάξεως χιλιοστών και αντίστοιχες με ακτίνα τάξεως μικρομέτρων που υπόκεινται σε δύο ειδών διαταραχές της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού: α) βηματική αλλαγή και β) αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται τα τελικά συμπεράσματα και γίνονται προτάσεις για περαιτέρω έρευνα.

2. Θεωρητική Ανάλυση

2.1 Διατύπωση του προβλήματος – Μοντελοποίηση της μικροφουσαλίδας

Μελετάται η δυναμική συμπεριφορά μικροφουσαλίδας, χωρίς εξωτερικό περίβλημα, η οποία ταλαντώνεται λόγω μεταβολών της πίεσης στην κυρίως μάζα του ρευστού στο οποίο ευρίσκεται, παρουσία γειτονικού τοιχώματος. Θεωρούμε ότι η μικροφουσαλίδα στο εσωτερικό της περιέχει συμπιεστό αέριο, ενώ το εξωτερικό ρευστό είναι ασυμπίεστο. Λόγω της συμπιεστότητας της μικροφουσαλίδας, η τελευταία εκτελεί ταλαντώσεις με συχνότητα που καθορίζεται από την εξωτερική διαταραχή. Για συχνότητα διαταραχής στο φάσμα των υπερήχων, 1 έως 10 MHz, η ταχύτητα της διεπιφάνειας και κατά συνέπεια του ρευστού είναι μεγάλη. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε, σε πρώτη προσέγγιση, ότι έχουμε αστρόβιλη ροή υψηλού αριθμού Reynolds και επομένως μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση του ιξώδους του περιβάλλοντος ρευστού. Επίσης, θεωρούμε ότι έχουμε αξονική συμμετρία, γεγονός που μειώνει κατά μία διάσταση τις απαιτήσεις διακριτοποίησης του προβλήματος. Επίσης, θεωρούμε ότι την αρχική χρονική στιγμή η μικροφουσαλίδα έχει σφαιρικό σχήμα και βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας με το περιβάλλον ρευστό πίεσης P_{st} . Το αέριο στο εσωτερικό της φουσαλίδας θεωρείται ιδανικό σε πίεση ισορροπίας $P_{g,bal}$, η οποία στην προκειμένη περίπτωση θα είναι: $P_{g,bal} = P_{st}$. Οι μεταβολές της πίεσης του εσωτερικού αερίου θεωρούνται ότι γίνονται ομοιόμορφα και ακαριαία. Το τοίχωμα θεωρείται στερεό και άκαμπτο, ενώ η αρχική απόσταση μεταξύ φουσαλίδας – τοιχώματος είναι d_0 (Εικόνα 2- 1).



Εικόνα 2- 1: Σχηματική απεικόνιση φουσαλίδας χωρίς περίβλημα κοντά σε στερεό τοίχωμα.

Εφαρμόζουμε αδιαστατοποίηση θεωρώντας ως χαρακτηριστικά μεγέθη:

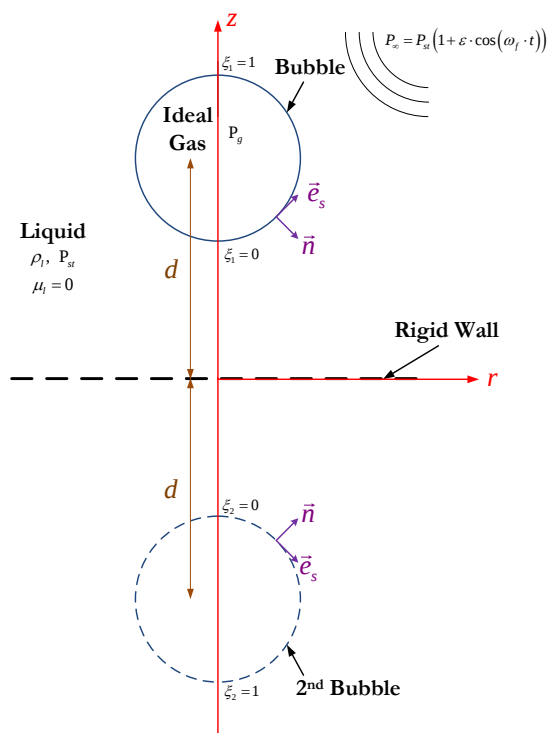
$$\text{Χαρακτηριστικό μήκος: } L^* = R_{bal} \quad (2-1)$$

$$\text{Χαρακτηριστική πίεση: } P^* = \rho_l \cdot R_{bal}^2 \cdot \omega_f^2 \quad (2-2)$$

$$\text{Χαρακτηριστικός χρόνος: } t^* = 1/\omega_f, \quad (2-3)$$

όπου R_{bal} : η ακτίνα της σφαιρικής μικροφυσαλίδας στην κατάσταση ισορροπίας, ρ_l : η πυκνότητα του περιβάλλοντος ρευστού και ω_f : η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής. Στο εξής οι αδιάστατες μεταβλητές θα εμφανίζονται χωρίς αστερίσκο και αυτές με διαστάσεις με αστερίσκο.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση του στερεού τοιχώματος η συνιστώσα της ταχύτητας που είναι κάθετη σε αυτό μηδενίζεται. Αυτό επιτυγχάνεται με θεώρηση πανομοιότυπης αξονοσυμμετρικής φυσαλίδας τοποθετημένης συμμετρικά ως προς την αρχική (Εικόνα 2- 2). Επομένως, αντί του συστήματος φυσαλίδα – τοίχωμα, έχουμε το σύστημα φυσαλίδα – φυσαλίδα. Θέτουμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το σημείο τομής του άξονα συμμετρίας (άξονας z) και του τοιχώματος. Ο άξονας r είναι κατά μήκος του τοιχώματος. Η διαταραχή του πεδίου πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού γίνεται είτε βηματική αλλαγή της πίεσης $P_\infty^* = P_{st}^*(1 + \varepsilon)$, είτε με αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής $P_\infty^* = P_{st}^*[1 + \varepsilon \cdot \cos(\omega_f \cdot t^*)]$, όπου ε : το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής.



Εικόνα 2- 2: Σχηματική απεικόνιση του συστήματος φυσαλίδα – φυσαλίδα.

2.2 Περιγραφή της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας κατά Lagrange

Στην περιγραφή κατά Lagrange ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η μεταβλητή ξ , η οποία παίρνει τιμές μεταξύ 0 και N (όπου N είναι ο αριθμός των σωματιδίων που θεωρούμε και των οποίων η κίνηση παρακολουθείται πάνω στη διεπιφάνεια) και ο χρόνος t . Επομένως, η μεταβλητή ξ φανερώνει ουσιαστικά την ταυτότητα του κάθε σωματιδίου ξεχωριστά. Λόγω αξονικής συμμετρίας, η γωνία φ του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων (r, φ, z) θα θεωρηθεί ότι δεν παίζει ρόλο και θα υποθεθεί ότι $\varphi = 0$. Οι συντεταγμένες r και z εμφανίζονται σαν εξαρτημένες μεταβλητές των ξ και t , δηλαδή: $r = r(\xi, t)$ και $z = z(\xi, t)$.

Επίσης, η μεταβλητή ξ συνδέεται με το μήκος τόξου S της γενέτειρας του σχήματος της φυσαλίδας κάθε χρονική στιγμή με τη σχέση:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \xi} \right|_t = S_\xi = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial r}{\partial \xi} \right|_t \right)^2 + \left(\left. \frac{\partial z}{\partial \xi} \right|_t \right)^2} = \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2} \quad (2-4)$$

Ξεκινώντας από το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \quad (2-5)$$

το οποίο περιγράφει τη θέση της διεπιφάνειας κάθε χρονική στιγμή και θεωρώντας ότι η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου της διεπιφάνειας, που τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στη θέση (r_0, z_0) , είναι:

$$\vec{U}_{\text{σωμ.}} = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_{r_0, z_0}, \quad (2-6)$$

προκύπτει ότι:

$$U_r = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_0, z_0}, \quad (2-7)$$

και

$$U_z = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{r_0, z_0} \quad (2-8)$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι:

$$\vec{U}_{\text{σωμ.}} = U_s \vec{e}_s + U_n \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \vec{n} \quad (2-9)$$

όπου $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό της φυσαλίδας:

$$\vec{n} = \frac{z_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \vec{e}_r - \frac{r_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \vec{e}_z = \frac{z_\xi}{S_\xi} \vec{e}_r - \frac{r_\xi}{S_\xi} \vec{e}_z = z_s \vec{e}_r - r_s \vec{e}_z \quad (2-10)$$

και $\vec{e}_s$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στη διεπιφάνεια:

$$\vec{e}_s = \frac{r_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \vec{e}_r + \frac{z_\xi}{\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} \vec{e}_z = \frac{r_\xi}{S_\xi} \vec{e}_r + \frac{z_\xi}{S_\xi} \vec{e}_z = r_s \vec{e}_r + z_s \vec{e}_z, \quad (2-11)$$

τότε συνδυασμός των (2-4), (2-7), (2-8), (2-9), (2-10) και (2-11) θα δώσει:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_0, z_0} = \frac{\Phi_\xi r_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial n} z_\xi \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}}{r_\xi^2 + z_\xi^2} \quad (2-12)$$

και

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{r_0, z_0} = \frac{\Phi_\xi z_\xi - \frac{\partial \Phi}{\partial n} r_\xi \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}}{r_\xi^2 + z_\xi^2}, \quad (2-13)$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2} = S_\xi, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (2-14)$$

Στα παραπάνω, $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ υποδηλώνει παραγωγήκη κάθετα στη διεπιφάνεια και προς το εξωτερικό

της μικροφυσαλίδας, ενώ $\Phi_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ εφαπτομενικά της γενέτειρας της φυσαλίδας.

Η συνέχεια των κάθετων ταχυτήτων στη διεπιφάνεια δίνει:

$$\frac{dr}{dt} \frac{\partial z}{\partial s} - \frac{dz}{dt} \frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Rightarrow \dot{r} \frac{z_\xi}{S_\xi} - \dot{z} \frac{r_\xi}{S_\xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (2-15)$$

ενώ η συνέχεια των εφαπτομενικών ταχυτήτων δίνει:

$$\frac{dr}{dt} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Rightarrow \dot{r} \frac{r_\xi}{S_\xi} + \dot{z} \frac{z_\xi}{S_\xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s} \Rightarrow \dot{r} \cdot r_\xi + \dot{z} \cdot z_\xi = \Phi_\xi \quad (2-16)$$

Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bernoulli μεταξύ του άπειρου και της διεπιφάνειας ρευστού – φυσαλίδας, τότε θα προκύψει σε αδιάστατη μορφή η παρακάτω σχέση:

$$P_l + \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = P_\infty \quad (2-17)$$

όπου P_l : είναι η πίεση του ρευστού που περιβάλλει τη φυσαλίδα υπολογισμένη στη διεπιφάνεια.

Από τον ορισμό της υλικής παραγώγου έχουμε:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \Phi \quad (2-18)$$

$$\text{Όμως: } \vec{U} = \vec{\nabla}\Phi \quad (2-19)$$

Οπότε, από τις (2-18) και (2-19) προκύπτει:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - \left| \vec{\nabla}\Phi \right|^2 \quad (2-20)$$

Το ισοζύγιο κάθετων δυνάμεων στη διεπιφάνεια θα δώσει σε αδιάστατη μορφή:

$$P_g - P_l = \frac{1}{We} (\vec{\nabla}_s \cdot \vec{n}), \quad (2-21)$$

όπου P_g : η πίεση του αερίου στο εσωτερικό της φυσαλίδας, P_l : η πίεση του περιβάλλοντος

ρευστού κοντά στη διεπιφάνεια, $We = \rho_l \cdot R_{bal}^3 \cdot \omega_f^2 / \sigma$: ο αριθμός Weber, ο οποίος εκφράζει τη

σημασία των αδρανειακών δυνάμεων σε σχέση με την επιφανειακή τάση, σ : η επιφανειακή

τάση στη διεπιφάνεια και $\vec{\nabla}_s = \sum_{i=1}^2 \vec{a}^i \frac{\partial}{\partial u_i}$, $i=1,2$: η επιφανειακή απόκλιση, $\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u_i}$, $i=1,2$

και $\vec{a}^i = \frac{(-1)^j (\vec{a}_j \times \vec{n})}{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{n}|}$, $i, j=1,2$ $i \neq j$ είναι τα συμμεταβλητά και αντιμεταβλητά διανύσματα

βάσης (covariant and contravariant basis vectors) αντίστοιχα, $\vec{R}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου u_i , $i=1,2$ της διεπιφάνειας.

Συνεπώς, ορίζεται ο τανυστής καμπυλότητας της διεπιφάνειας ως $\underline{\underline{B}} \equiv \vec{\nabla}_s \vec{n}$ οι συνιστώσες του οποίου ως προς τη βάση $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n}]$ είναι $b_{ij} = \vec{a}_i \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \vec{a}_j$, $i, j=1,2$. Ο $\underline{\underline{B}}$ είναι 2x2 συμμετρικός πίνακας. Για τη διαγωνιοποίησή του και την εύρεση των κύριων διευθύνσεων πρέπει να λυθεί το ιδιοπρόβλημα $\underline{\underline{B}} \cdot \vec{t}_i = k_i \cdot \vec{t}_i$, $i=1,2$, όπου οι ιδιοτιμές k_i είναι οι καμπυλότητες στις κύριες διευθύνσεις, ενώ τα ιδιοδιανύσματα $\vec{t}_i$ εκφράζονται ως προς τα $\vec{a}_i$. Αν λυθεί το ιδιοπρόβλημα προκύπτει ότι $\vec{t}_1 = \vec{e}_s$, $\vec{t}_2 = \vec{e}_\phi$ και

$$k_1 = k_s = -\frac{r_{\xi\xi} \cdot z_\xi}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{3/2}} + \frac{r_\xi \cdot z_{\xi\xi}}{(r_\xi^2 + z_\xi^2)^{3/2}} = -\frac{r_{\xi\xi} \cdot z_\xi}{S_\xi^3} + \frac{r_\xi \cdot z_{\xi\xi}}{S_\xi^3}, \quad (2-22)$$

$$k_2 = k_\phi = \frac{z_\xi}{r \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2}} = \frac{z_\xi}{r \cdot S_\xi^3}, \quad (2-23)$$

ενώ η μέση καμπυλότητα της διεπιφάνειας είναι: $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Από την αντικατάσταση των (2-20) και (2-21) στη (2-17) προκύπτει η δυναμική συνθήκη στη διεπιφάνεια και από την οποία μπορεί να υπολογιστεί το δυναμικό της ταχύτητας κοντά στη διεπιφάνεια:

$$\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{r_0, z_0} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2}{2} + P_\infty - P_g + \frac{2k_m}{We} \Rightarrow \left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{r_0, z_0} = \frac{\Phi_s^2 + \Phi_n^2}{2} + P_\infty - P_g + \frac{k_s + k_\varphi}{We} \quad (2-24)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος λόγω αξονικής συμμετρίας είναι:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \xi} \right|_{\xi=0,1} = \left. \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0,1} = 0, \quad r(\xi=0) = r(\xi=1) = 0 \quad (2-25)$$

Τέλος, η πίεση στο εσωτερικό της φυσαλίδας μεταβάλλεται αδιαβατικά και συνεπώς για ιδανικό αέριο ισχύει:

$$P_g \cdot V^\gamma = P_0 \cdot V_0^\gamma = P_{g,bal} \cdot \left(\frac{4 \cdot \pi}{3} \right)^\gamma = P_{st} \cdot \left(\frac{4 \cdot \pi}{3} \right)^\gamma, \quad (2-26)$$

όπου V : ο όγκος της φυσαλίδας την τρέχουσα χρονική στιγμή t , V_0 : ο αρχικός όγκος της μικροφυσαλίδας, ο οποίος για σφαίρα είναι: $V_0 = \frac{4}{3} \pi$ (αδιάστατος) και γ : πολυτροπική σταθερά του εσωτερικού αερίου.

Όλη η παραπάνω ανάλυση γίνεται και για τη δεύτερη, πανομοιότυπη, συμμετρική μικροφυσαλίδα με τη μόνη διαφορά ότι η z -συνιστώσα της δεύτερης έχει αντίθετο πρόσημο από της πρώτης.

2.3 Ολοκληρωτική εξίσωση της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας

Για την επίλυση του προβλήματος, χρειάζεται να υπολογισθεί η κάθετη παράγωγος $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας. Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της εξίσωσης Laplace πάνω στη διεπιφάνεια. Επειδή υποθέσαμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και χωρίς ιξώδεις ισχύει η εξίσωση:

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \Phi \quad (2-27)$$

Επιπλέον, επειδή η ροή εξωτερικά της φυσαλίδας θεωρείται ασυμπίεστη, η εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (2-28)$$

Η (2-27) με την (2-28) δίνει την εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2-29)$$

Χρησιμοποιώντας το 2^ο θεώρημα του Green [26]:

$$\int_D \left[\Phi(\bar{z}) \nabla^2 \hat{G}(\bar{x}, \bar{z}) - \hat{G}(\bar{x}, \bar{z}) \nabla^2 \Phi(\bar{z}) \right] dV(\bar{z}) = \int_{\partial D} \left[\Phi(\bar{y}) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\bar{x}, \bar{y}) - \hat{G}(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\bar{y}) \right] dA(\bar{y}), \quad \bar{x}, \bar{z} \in D, \quad \bar{y} \in \partial D, \quad (2-30)$$

όπου Φ : το δυναμικό της ταχύτητας και $\hat{G}, \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$: οι πυρήνες απλής και διπλής στοιβάδας της εξίσωσης (2-29) για τους οποίους ισχύει:

$$\nabla^2 \hat{G}(\bar{x}, \bar{z}) + \Delta(\bar{x}, \bar{z}) = 0, \quad \bar{x}, \bar{z} \in D^\infty \text{ και } \lim_{\substack{\bar{x} \rightarrow \infty \\ \bar{z} \rightarrow \infty}} \left[\hat{G}(\bar{x}, \bar{z}) \right] = 0, \quad (2-31)$$

όπου: Δ η συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Με χρήση των σχέσεων (2-29), (2-30) και (2-31) προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση πάνω στη διεπιφάνεια:

$$-\frac{1}{2} \Phi(\bar{x}, t) + \int_A \Phi(\bar{y}, t) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\bar{y}, \bar{x}) dA(\bar{y}, t) = \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\bar{y}, t) \hat{G}(\bar{y}, \bar{x}) dA(\bar{y}, t), \quad \bar{y}, \bar{x} \in A \quad (2-32)$$

όπου: A η επιφάνεια της φουσαλίδας και $\bar{n}$: το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην διεπιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό της φουσαλίδας. Ο πυρήνας $\hat{G}$ υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης (2-31) για τρισδιάστατο χωρίο [27],

$$\hat{G}(\bar{x}, \bar{z}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\bar{x} - \bar{z}|}, \quad \bar{x}, \bar{z} \in D^\infty \quad (2-33)$$

Στην ολοκληρωτική εξίσωση (2-32), όταν το σημείο με διάνυσμα θέσης $\bar{y}$ (σημείο πηγής - source point) τείνει να συμπίπτει στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\bar{x}$ (πεδιακό σημείο - field point), τότε εμφανίζεται ιδιομορφία στον πυρήνα $\hat{G}$, η οποία όμως είναι αδύναμη (weak singularity) και για το λόγο αυτό η ολοκλήρωση είναι εφικτή. Αντίθετα, η ολοκλήρωση που περιέχει τον πυρήνα $\frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$ είναι εφικτή μόνο υπό την έννοια του Cauchy principal value [28]. Για

να άρουμε την ισχυρή ιδιομορφία (strong singularity) που εμφανίζεται στον πυρήνα $\frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$, προσθέτουμε και αφαιρούμε στο πρώτο μέρος της εξίσωσης (2-32) τον όρο

$$\int_A \Phi(\bar{x}, t) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\bar{y}, \bar{x}) dA(\bar{y}, t). \text{ Αν λάβουμε υπ' όψιν ότι:}$$

$$\Phi(\bar{x}, t) \int_A \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\bar{y}, \bar{x}) dA(\bar{y}, t) = -\frac{1}{2} \Phi(\bar{x}, t), \quad (2-34)$$

Η (2-32) τελικά θα δώσει:

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\bar{y}, t) \hat{G}(\bar{y}, \bar{x}) dA(\bar{y}, t) = -\Phi(\bar{x}, t) + \int_A \left[\Phi(\bar{y}, t) - \Phi(\bar{x}, t) \right] \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\bar{y}, \bar{x}) dA(\bar{y}, t) \quad (2-35)$$

Επίσης, λόγω της αξονικής συμμετρίας, το δυναμικό είναι ανεξάρτητο από τη γωνία φ και η ολοκλήρωση των πυρήνων θα δώσει [29], [30]:

$$G = \int_0^{2\pi} \hat{G} d\varphi, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} d\varphi \quad (2-36)$$

Η (2-35) με την (2-36) θα δώσουν τελικά σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \alpha \Phi(r_0, z_0, t) = & \int_{S_{b_1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, z, t) G(r_0, z_0, r, z) dS_{b_1} - \int_{S_{b_1}} [\Phi(r, z, t) - \Phi(r_0, z_0, t)] \frac{\partial G}{\partial n}(r_0, z_0, r, z) dS_{b_1} + \\ & + \int_{S_{b_2}} \frac{\partial \Phi}{\partial n}(r, z, t) G(r_0, z_0, r, z) dS_{b_2} - \int_{S_{b_2}} \Phi(r, z, t) \frac{\partial G}{\partial n}(r_0, z_0, r, z) dS_{b_2} \end{aligned} \quad (2-37)$$

Στην παραπάνω σχέση S_{b_1} και S_{b_2} συμβολίζουν τις διεπιφάνειες των δύο φυσαλίδων με το περιβάλλον ρευστό και $\alpha = 0, 1$ ή 2 αναλόγως του αν το πεδιακό σημείο βρίσκεται εντός, επί της διεπιφάνειας ή εκτός της μικροφυσαλίδας. Λόγω της συμμετρικής διάταξης των δύο φυσαλίδων η παραπάνω σχέση ικανοποιεί τον μηδενισμό της παραγώγου επί της στερεάς επιφάνειας.. Επιπλέον έχει θεωρηθεί ότι το πεδιακό σημείο (r_0, z_0) βρίσκεται στην επιφάνεια της πρώτης φυσαλίδας, ώστε να εξομαλυνθεί η ολοκλήρωση του πυρήνα διπλής στοιβάδας $\frac{\partial G}{\partial n}$, της ιδιόμορφης λύσης πάνω στην εν λόγω επιφάνεια S_{b_1} . Ανάλογη διαδικασία χρησιμοποιείται και για την περίπτωση που το πεδιακό σημείο βρεθεί στη διεπιφάνεια της δεύτερης S_{b_2} .

Η εξίσωση (2-37), που είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ο όρος $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ στη διεπιφάνεια, εφόσον ξέρουμε το δυναμικό πάνω στη διεπιφάνεια. Επειδή ο άγνωστος περιέχεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση Fredholm πρώτου είδους. Για το λόγο αυτό, στην αριθμητική επίλυση θα χρειαστεί να γίνει απ' ευθείας αντιστροφή του πίνακα για την επίλυση του συστήματος που προκύπτει, σε αντίθεση με τις εξισώσεις Fredholm δεύτερου είδους, όπου η επίλυση του συστήματος γίνεται με επαναληπτικό τρόπο.

2.4 Συνολική ενέργεια του συστήματος

Για να παράγουμε την ολοκληρωτική εξίσωση της ενέργειας του συστήματος ξεκινάμε από την εξίσωση:

$$\iiint_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla^2 \Phi dV = 0 \quad (2-38)$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\oint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA - \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[(\vec{\nabla} \Phi)^2 \right] dV = 0 \quad (2-39)$$

Αν εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό θεώρημα του Reynolds στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\iiint_V (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV \right] = \oint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \frac{1}{2} \oint_A (\vec{\nabla} \Phi)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \quad (2-40)$$

ενώ κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέλη στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2-40) και εισάγοντας τη δυναμική εξίσωση της διεπιφάνειας (2-24) λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \right] - \oint_A \frac{\partial \Phi}{\partial n} \left(P_\infty - P_g + \frac{2k_m}{We} \right) dA = 0 \quad (2-41)$$

η οποία ουσιαστικά φανερώνει ότι η συνολική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται, αλλά εναλλάσσεται ανάμεσα σε κινητική ενέργεια, ενέργεια λόγω μεταβολής της επιφάνειας της φυσαλίδας και σε ενέργεια λόγω συμπίεσης του αερίου εντός της φυσαλίδας. Επιπλέον, λόγω απουσίας ιξώδους, το σύστημα είναι συντηρητικό και επομένως η συνολική ενέργεια παραμένει αμετάβλητη με το χρόνο. Συνεπώς, η συνολική ενέργεια δίνεται πάντα από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} \oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \oint_A dA + V \left(P_\infty + \frac{P_g}{\gamma - 1} \right) \quad (2-42)$$

3. Αριθμητική Επίλυση

Λόγω χρήσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης, το πρόβλημα της ροής μεταφέρεται από το τρισδιάστατο χωρίο στη διεπιφάνεια των δύο φυσαλίδων, δηλαδή το πρόβλημα γίνεται από τρισδιάστατο διδιάστατο. Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης της αξονικής συμμετρίας χρειάζεται να διακριτοποιηθεί μόνο η γενέτειρα καμπύλη του σχήματος των φυσαλίδων. Επομένως, η διακριτοποίηση, είτε μέσω των πεπερασμένων, είτε μέσω των συνοριακών στοιχείων θα είναι σε μία διάσταση.

3.1 Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) χρησιμοποιείται για τη μετατροπή των εξισώσεων συνέχειας των κάθετων κι εφαπτομενικών ταχυτήτων (2-15), (2-16) και της δυναμικής οριακής συνθήκης (2-24) από μερικές διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις αρχικών τιμών. Προς το σκοπό αυτό, οι αντίστοιχες άγνωστες μεταβλητές (r, z, Φ) αντιπροσωπεύονται ως ένα πεπερασμένο άθροισμα άγνωστων συντελεστών και πολλαπλασιάζονται από ένα σύνολο προκαθορισμένων συναρτήσεων βάσης, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε μερικά στοιχεία του χωρίου. Η ασθενής μορφή προκύπτει κατά τον πολλαπλασιασμό των εξισώσεων (2-15), (2-16) και (2-24) από κάθε συνάρτηση βάσης και ολοκληρώνεται σε όλο το χωρίο. Η ολοκλήρωση κατά παράγοντες εφαρμόζεται επίσης, όποτε είναι δυνατόν, με σκοπό να απαλειφθεί η δεύτερη παράγωγος, που εμφανίζεται στον όρο της καμπυλότητας της επιφάνειας. Τέσσερα σημεία ολοκλήρωσης Gauss χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων μέσα σε κάθε στοιχείο. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ότι τα αριθμητικά σφάλματα προέρχονται από την παρεμβολή των άγνωστων συναρτήσεων και όχι από την αριθμητική ολοκλήρωση [31].

Ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιήθηκαν οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε τέσσερα στοιχεία και οι οποίες σε κάθε στοιχείο ικανοποιούν τη συνέχεια όχι μόνο οι ίδιες, αλλά και η πρώτη και δεύτερη παράγωγός τους [32]. Εφόσον για τις συναρτήσεις βάσεις ισχύει ότι $B_i(\xi = \xi_j) \neq \delta_{ij}$, οι συντελεστές των αγνώστων a_i, b_i, c_i της αναπαράστασης B-splines:

$$r(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} a_i(t) B_i(\xi), \quad z(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} b_i(t) B_i(\xi), \quad \Phi(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i(t) B_i(\xi) \quad (3-1)$$

όπου N: ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος, είναι διαφορετικοί από τις τιμές των άγνωστων συναρτήσεων στους κόμβους. Κατά συνέπεια, αυτός ο τρόπος αναπαράστασης απαιτεί έναν πρόσθετο πολλαπλασιασμό πινάκων προκειμένου να πάρουμε τις τιμές στους κόμβους των

συναρτήσεων. Οι συντελεστές που αντιστοιχούν σε φανταστικούς κόμβους εκτός του χωρίου, δηλαδή, $a_0, a_{N+1}, b_0, b_{N+1}, c_0, c_{N+1}$ εκφράζονται με όρους συντελεστών των εσωτερικών κόμβων χρησιμοποιώντας συνοριακές συνθήκες και στην προκειμένη περίπτωση τις σχέσεις (2-25). Οι κόμβοι αυτοί έχουν μόνο μαθηματική σημασία [33]. Τέλος, επειδή οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines καλύπτουν τέσσερα στοιχεία θα δημιουργηθεί πίνακας ζώνης με εύρος ζώνης επτά, ο οποίος απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς για την αντιστροφή του σε σχέση με τα δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange (εύρος ζώνης 5). Το μειονέκτημα αυτό εξισορροπείται από την αύξηση της ακρίβειας, σε σχέση με τα δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange, η οποία είναι στην περίπτωση των πρώτων $O(h^4)$ για την παρεμβολή της άγνωστης συνάρτησης και $O(h^3)$ για την παρεμβολή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης, όπου h : το μήκος του στοιχείου [30].

Οι εξισώσεις (2-15), (2-16) λύνονται συζευγμένα, ενώ η (2-24) ξεχωριστά. Τελικά προκύπτουν συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\begin{cases} \underline{\underline{M_1}} \frac{d\underline{\underline{a}}}{dt} + \underline{\underline{M_1}} \frac{d\underline{\underline{b}}}{dt} = \underline{\underline{F_1}} \\ \underline{\underline{M_3}} \frac{d\underline{\underline{a}}}{dt} + \underline{\underline{M_4}} \frac{d\underline{\underline{b}}}{dt} = \underline{\underline{F_2}} \end{cases} \quad \text{και} \quad \underline{\underline{M_5}} \frac{d\underline{\underline{c}}}{dt} = \underline{\underline{F_3}} \quad (3-2)$$

όπου το πρώτο σύστημα αναφέρεται στις εξισώσεις συνέχειας των κάθετων κι εφαπτομενικών ταχυτήτων (2-15) και (2-16) και το δεύτερο στη δυναμική συνοριακή συνθήκη (2-24). Τα $\underline{\underline{M_1}}$, $\underline{\underline{M_2}}$, $\underline{\underline{M_3}}$, $\underline{\underline{M_4}}$, και $\underline{\underline{M_5}}$ είναι οι πίνακες μάζας των παραπάνω εξισώσεων και μεταβάλλονται με το χρόνο.

3.2 Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Η εξίσωση που διακριτοποιείται με συνοριακά στοιχεία είναι η ολοκληρωτική εξίσωση (2-37). Η επιπλέον άγνωστη μεταβλητή που θα διακριτοποιηθεί είναι η ταχύτητα των σωματιδίων κάθετα στη διεπιφάνεια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} d_i(t) B_i(\xi), \quad (3-3)$$

όπου πάλι ως συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines. Επιτρέποντας το πεδιακό σημείο $\hat{\xi}$ (field point) να προσεγγίσει κάθε έναν από τους κόμβους του πλέγματος και ολοκληρώνοντας όλα τα στοιχεία που σχετίζονται με το σημείο πηγής ξ

(source point), για σταθερό σημείο πεδίου, προκύπτουν N εξισώσεις. Οι αξονοσυμμετρικοί πυρήνες G και $\frac{\partial G}{\partial n}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι [34]:

$$G = \frac{K(m)}{\pi\sqrt{a+b}} \quad (3-4)$$

και

$$\vec{\nabla} G \cdot \vec{n} = \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} n_r + \frac{\partial G}{\partial z} n_z \quad \text{με:}$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{2r(\xi)\pi\sqrt{a+b}} \left[\frac{\left[z(\xi) - z(\hat{\xi}) \right]^2 + r^2(\hat{\xi}) - r^2(\xi)}{a-b} E(m) - K(m) \right] \quad (3-5)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = - \left[\frac{1}{\pi\sqrt{a+b}} \frac{z(\xi) - z(\hat{\xi})}{a-b} E(m) \right], \quad \text{όπου:}$$

$$a = r^2(\xi) + r^2(\hat{\xi}) + \left[z(\xi) - z(\hat{\xi}) \right]^2$$

$$b = 2r(\xi)r(\hat{\xi}) \quad (3-6)$$

$$m = \frac{2b}{a+b}, \quad m_l = 1 - m = \frac{a-b}{a+b}$$

και $K(m)$, $E(m)$ είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, τα οποία υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια ($< 2 \times 10^{-8}$) με τη βοήθεια αναπτυγμάτων:

$$K(m) = \sum_{i=0}^4 A_i m_l^i + \ln\left(\frac{1}{m_l}\right) \sum_{i=1}^4 C_i m_l^i$$

$$E(m) = 1 + \sum_{i=1}^4 D_i m_l^i + \ln\left(\frac{1}{m_l}\right) \sum_{i=1}^4 E_i m_l^i, \quad (3-7)$$

όπου A_i, C_i, D_i, E_i : είναι δεδομένες σταθερές [35]. Όταν το πεδιακό σημείο $\hat{\xi}$ (field point) τείνει να συμπίσει με το σημείο πηγής ξ (source point), η ολοκλήρωση του δεύτερου μέλους της (2-37) απαιτεί ειδική μεταχείριση λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας της μορφής

$$\ln\left(\frac{1}{a-b}\right) = \ln\left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^2}\right) \quad \text{που εμφανίζει ο πυρήνας } G. \text{ Στα στοιχεία που εμφανίζεται η}$$

προαναφερθείσα ιδιομορφία εφαρμόζεται λογαριθμική ολοκλήρωση κατά Gauss με χρήση 12 σημείων [31]. Στα υπόλοιπα εφαρμόζεται κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss με χρήση 4 σημείων. Ο πυρήνας $\frac{\partial G}{\partial n}$ παρουσιάζει ισχυρότερη ιδιομορφία της μορφής $|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}|^{-1}$. Ο όρος του

πυρήνα $\frac{\partial G}{\partial n}$ στην εξίσωση (2-37) γίνεται ομαλός με τη διαδικασία που προαναφέρθηκε στην ενότητα 2.3 του προηγούμενου κεφαλαίου. Συνεπώς, για την ολοκλήρωση πλέον αυτών των όρων εφαρμόζεται κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss με διάφορους αριθμούς σημείων, όπως προτείνεται κι από τη βιβλιογραφία [36].

Τελικά προκύπτει σύστημα της μορφής:

$$\overset{(N \times N)}{\underline{\underline{G}}} \cdot \overset{(N \times 1)}{\underline{P}} = \overset{(N \times N)}{\underline{\underline{K}}} \cdot \overset{(N \times 1)}{\underline{F}}, \quad (3-8)$$

όπου $\underline{P}$: είναι το διάνυσμα που περιέχει τις γνωστές τιμές του δυναμικού σε κάθε κόμβο και $\underline{F}$: το διάνυσμα που περιέχει τους άγνωστους συντελεστές d_i της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$. Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν οι συνοριακές συνθήκες (2-25), που ισχύουν λόγω αξονικής συμμετρίας και οι οποίες μειώνουν κατά δύο τον αριθμό των άγνωστων συντελεστών d_i .

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι οι πίνακες που προκύπτουν είναι πλήρεις, σε αντίθεση με αυτούς που δημιουργούνται με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων οι οποίοι έχουν μορφή ζώνης. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, τόσο η κατασκευή του πίνακα $\underline{\underline{K}}$, όσο και η αντιστροφή του, να είναι πολύ χρονοβόρες διαδικασίες σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία. Χρησιμοποιώντας ωστόσο 100 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της διεπιφάνειας προέκυψε ότι η κατασκευή του πίνακα $\underline{\underline{K}}$ είναι περίπου 10 φορές πιο χρονοβόρα διαδικασία απ' ότι η αντιστροφή του [37], [38]. Για το λόγο αυτό έγινε παραλληλισμός της κατασκευής του πίνακα $\underline{\underline{K}}$ χρησιμοποιώντας το πρωτόκολλο επικοινωνίας MPI. Περαιτέρω, βελτιστοποίηση μπορεί να γίνει με την παράλληλη αντιστροφή του πίνακα $\underline{\underline{K}}$.

3.3 Χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων

Για την ολοκλήρωση στο χρόνο χρησιμοποιείται το ρητό σχήμα τέταρτης τάξης Runge-Kutta, λόγω των καλύτερων χαρακτηριστικών ευστάθειας [30]. Στην πραγματικότητα, παρατηρήθηκε ότι, για μικρές αρχικές παραμορφώσεις, διπλασιάζοντας τον αριθμό των στοιχείων κατά μήκος της διεπιφάνειας, απαιτείται, ένα χρονικό βήμα περίπου τέσσερις φορές μικρότερο για αριθμητική ευστάθεια. Η επίλυση των αγνώστων του προβλήματος γίνεται διαδοχικά. Όταν η πλήρης κατάσταση της φυσαλίδας είναι γνωστή, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή τα σημεία της επιφάνειας κινούνται με τον τρόπο που περιγράφουν οι εξισώσεις (2-15), (2-16) και λαμβάνονται οι νέες συντεταγμένες τους. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται και η νέα

τιμή του δυναμικού της ταχύτητας, όπως περιγράφεται από την (2-24). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική συνοριακή εξίσωση (2-37), παίρνουμε την κάθετη παράγωγο του δυναμικού, η οποία αντιπροσωπεύει την κάθετη ταχύτητα των διεπιφανειών των δύο φυσαλίδων. Στο τελευταίο στάδιο, υπολογίζεται ο όγκος της φυσαλίδας στη νέα χρονική στιγμή, η εσωτερική πίεση μεταβάλλεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι τον τερματισμό της προσομοίωσης λόγω πολύ μεγάλης παραμόρφωσης της διεπιφάνειας της φυσαλίδας. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η δυναμική της κατάρρευσης ή της θραύσης. Όπως εξηγείται και παρακάτω, ο επανακαθορισμός του πλέγματος γίνεται, καθώς ο χρόνος περνάει, με σκοπό να αποφύγουμε τη συγκέντρωση σημείων σε συγκεκριμένες περιοχές της διεπιφάνειας αφήνοντας έτσι το υπόλοιπο τμήμα της διεπιφάνειας χωρίς σημεία. Συγκεκριμένα, σε Λαγκραντζιανές προσομοιώσεις ροών με ελεύθερη επιφάνεια και επιφανειακή τάση παρατηρείται συστηματική συσσώρευση των σωματιδίων ρευστού σε περιοχές υψηλής καμπυλότητας όπου μειώνεται η πίεση του ρευστού. Κατά συνέπεια, τα σημεία ανακατανέμονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στο μήκος του στοιχείου, ενώ εξασφαλίζεται ακριβής διακριτοποίηση σε περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Αυτό επιτυγχάνεται με τοποθέτηση των σημείων κατά μήκος της διεπιφάνειας έτσι, ώστε το παρακάτω ολοκλήρωμα [39] να ελαχιστοποιείται:

$$\int_s (1 + d |2k_m|) ds = \int_0^1 (1 + d |2k_m|) \sqrt{r_\xi^2 + z_\xi^2} d\xi \quad (3-9)$$

όπου d : είναι η παράμετρος ελέγχου της συγκέντρωσης των πλεγματικών σημείων σε περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα. Αυτή η παράμετρος κυμαίνεται από 10^{-2} έως 10^{-3} , καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει από 80 έως 160. Η μείωση του d ισοδυναμεί με μείωση της επίδρασης της καμπυλότητας καθώς επανακαθορίζεται το πλέγμα.

Καθώς ο αριθμός των στοιχείων αυξάνει, η κατασκευή του πίνακα του συστήματος (3-8), ο οποίος είναι πλήρης όπως συνήθως συμβαίνει με τη μέθοδο συνοριακών στοιχείων, γίνεται το πιο χρονοβόρο κομμάτι των υπολογισμών καταλαμβάνοντας περισσότερο από το 80% του χρόνου επεξεργασίας [18], [30]. Προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε τον υπολογιστικό χρόνο καταφεύγουμε σε στρατηγικές παράλληλου προγραμματισμού. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας του συστήματος κατασκευάζεται με παραλληλισμό σε δώδεκα διαφορετικούς επεξεργαστές που απασχολούνται με την κατασκευή διαφορετικών γραμμών του πίνακα. Ο αλγόριθμος εκτελείται σε cluster με μηχανήματα (Intel i7) με επεξεργαστή 12 πυρήνων και μνήμη RAM 64GB, σε περιβάλλον Linux (openSuse 12.2), γεγονός που συνεπάγεται σημαντική εξοικονόμηση του υπολογιστικού χρόνου επεξεργασίας.

3.4 Αλγόριθμος επίλυσης

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με στερεό γειτονικό τοίχωμα είναι ο εξής:

- i. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ θεωρούμε ότι η πίεση στο άπειρο διαταράσσεται σύμφωνα με την εξίσωση $P_{\infty} = P_{st}(1 + \varepsilon)$ ή την εξίσωση $P_{\infty} = P_{st}[1 + \varepsilon \cdot \cos(t)]$, ενώ θεωρούμε ότι τόσο το δυναμικό Φ , όσο και η ταχύτητα $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ είναι μηδέν.
- ii. Έναρξη της χρονικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης.
- iii. Σύγκριση του μικρότερου μήκους τόξου με το αντίστοιχο ισοκατανεμημένο και ανακατανομή των σωματιδίων της διεπιφάνειας, εφόσον το πρώτο είναι αρκετά μικρότερο από το δεύτερο.
- iv. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στις σχέσεις (2-15), (2-16), (2-24) και υπολογίζουμε την καινούρια θέση της διεπιφάνειας (r, z) , καθώς και το δυναμικό Φ
- v. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων στην ολοκληρωτική εξίσωση (2-37) και με δεδομένο πλέον το δυναμικό Φ στη διεπιφάνεια υπολογίζουμε την ταχύτητα $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ κάθετα στη διεπιφάνεια.
- vi. Εφόσον ξέρουμε την καινούργια θέση της διεπιφάνειας, υπολογίζουμε τον καινούργιο όγκο της φυσαλίδας.
- vii. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2-26), η οποία δηλώνει την αδιαβατική μεταβολή του αερίου της φυσαλίδας, υπολογίζουμε την καινούργια πίεση στο εσωτερικό της.
- viii. Ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα (iii) με νέα δεδομένα για την πίεση στο εσωτερικό της φυσαλίδας, τη θέση, το δυναμικό και την κάθετη ταχύτητα της διεπιφάνειας και η επίλυση προχωράει στον χρόνο.

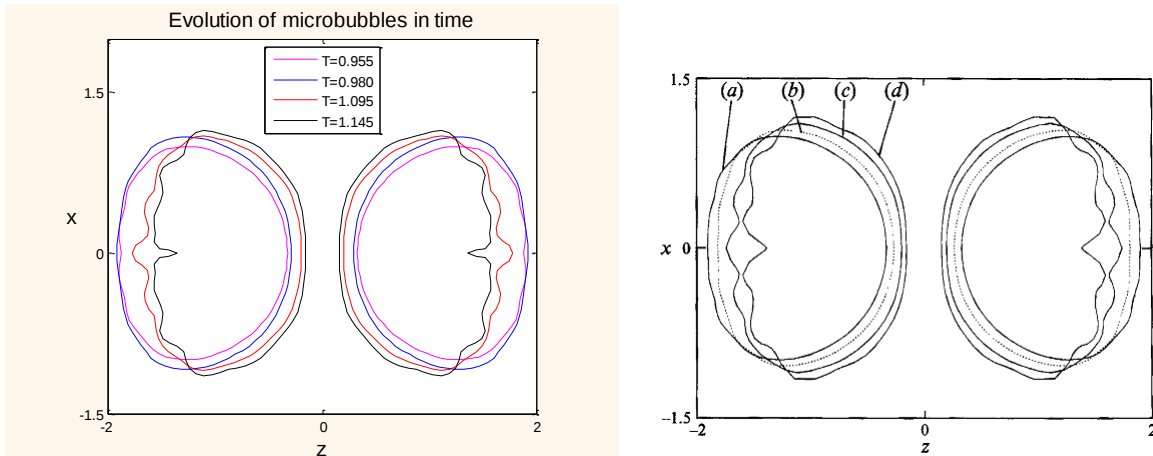
3.5 Αξιοπιστία της Αριθμητικής Μεθοδολογίας

Για την πιστοποίηση της ορθότητας της αριθμητικής μεθοδολογίας έγιναν προσομοιώσεις γνωστών περιπτώσεων από τη βιβλιογραφία [18], [19] οι οποίες λειτούργησαν ως «Benchmark Tests».

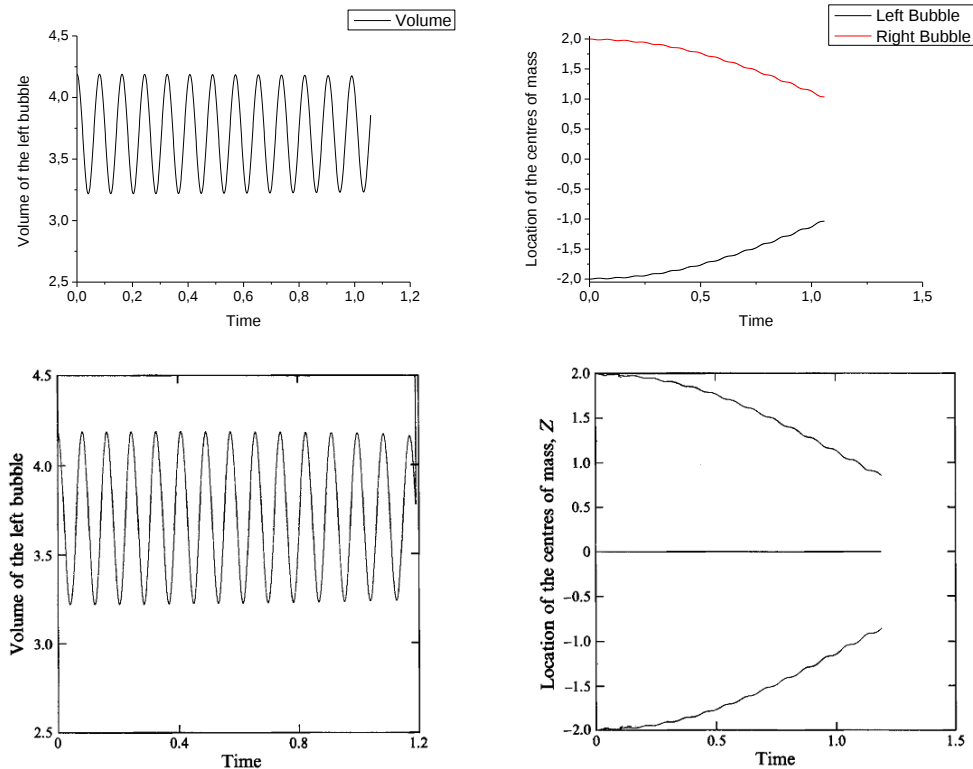
Δοκιμάστηκε η περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο όμοιων, αρχικά σφαιρικών φυσαλίδων βυθισμένων μέσα σε νερό, οι οποίες διαταράσσονται με βηματική αλλαγή στο πεδίο πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού. Οι παράμετροι της προσομοίωσης ήταν οι εξής:

$$R^* = 1 \text{ mm}, \sigma = 0.075 \text{ N/m}, \rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3, \gamma = 1.4, P_{st}^* = 100000 \text{ Pa}, \nu_0^* = 3267 \text{ Hz}, \varepsilon = 0.2$$

Η αρχική απόσταση μεταξύ των κέντρων μάζας των δύο φυσαλίδων είναι ίση με δύο διαμέτρους, δηλαδή $d^* = 4 \text{ mm}$.

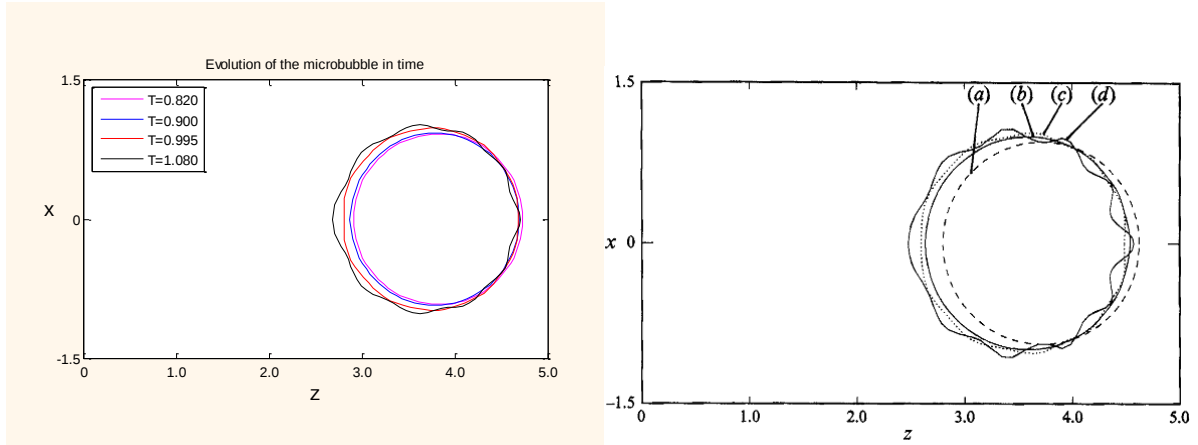


Διάγραμμα 3- 1: Χρονική εξέλιξη σχήματος των δύο φυσαλίδων στο τελικό στάδιο της προσομοίωσης, για $d^* = 4 \text{ mm}$. Αποτέλεσμα προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχο γράφημα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).

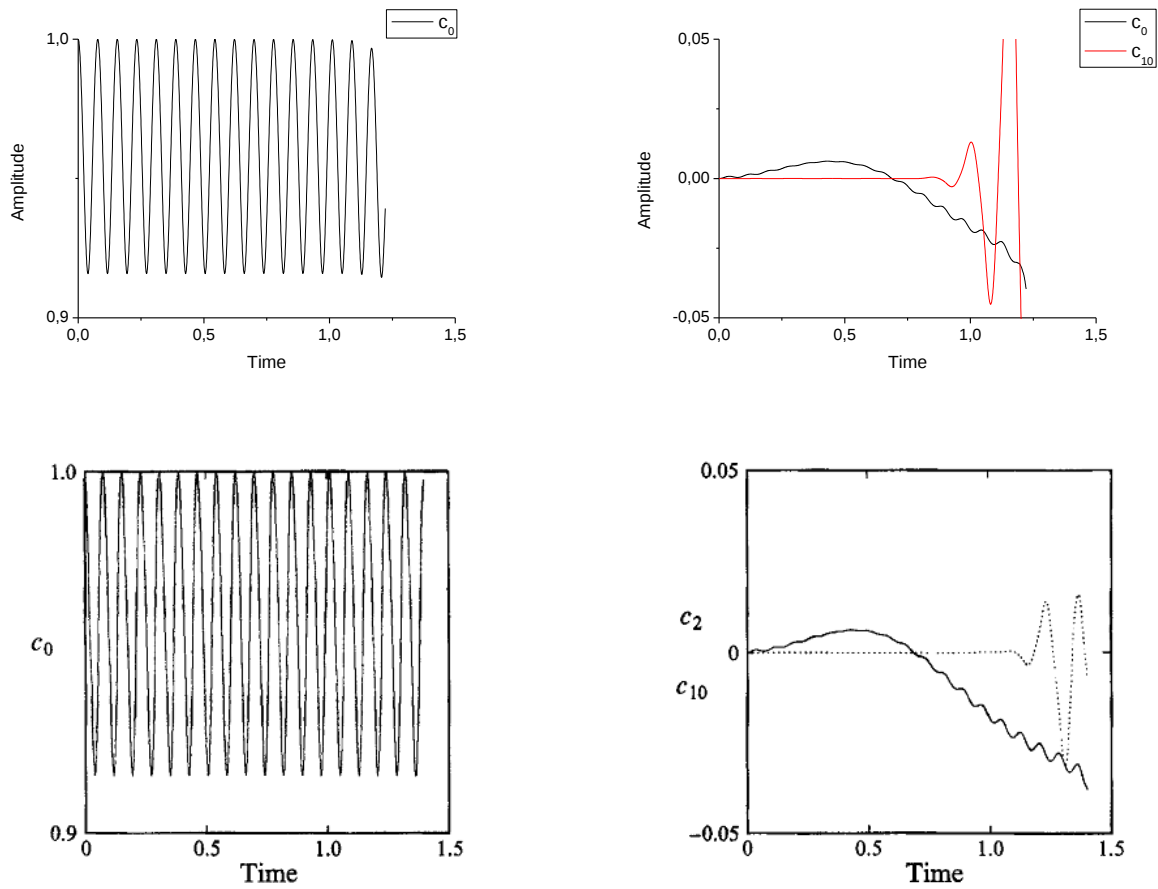


Διάγραμμα 3- 2: Διαγράμματα ταλαντώσεων όγκου της αριστερής φυσαλίδας και της χρονικής εξέλιξης των κέντρων μάζας των δύο φυσαλίδων, για $d^* = 4 \text{ mm}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (πάνω), αντίστοιχα διαγράμματα από τη βιβλιογραφία (κάτω).

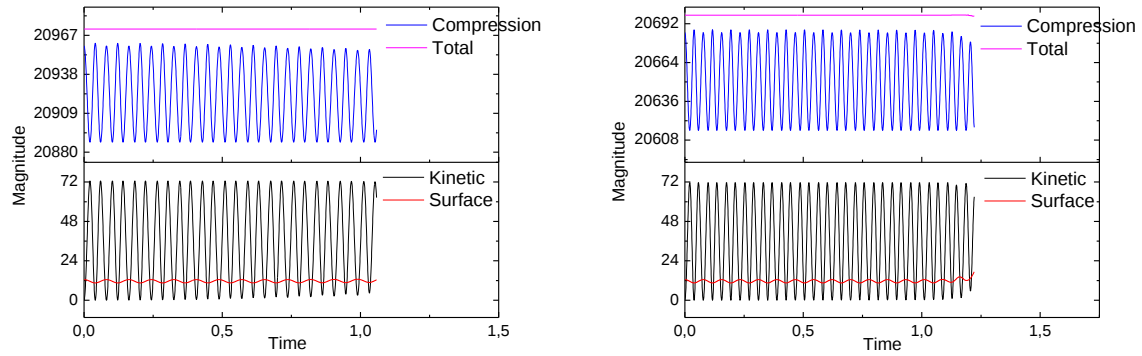
Παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα για αρχική απόσταση μεταξύ των κέντρων μάζας των δύο φυσαλίδων ίση με $d^* = 8 \text{ mm}$.



Διάγραμμα 3- 3: Χρονική εξέλιξη σχήματος των δύο φυσαλίδων στο τελικό στάδιο της προσομοίωσης, για $d^*=8\text{mm}$. Αποτέλεσμα προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχο γράφημα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).



Διάγραμμα 3- 4: Χρονική μεταβολή των συντελεστών Legendre c_0 , c_2 και c_{10} , για $d^*=8\text{mm}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (πάνω), αντίστοιχα αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία (κάτω).

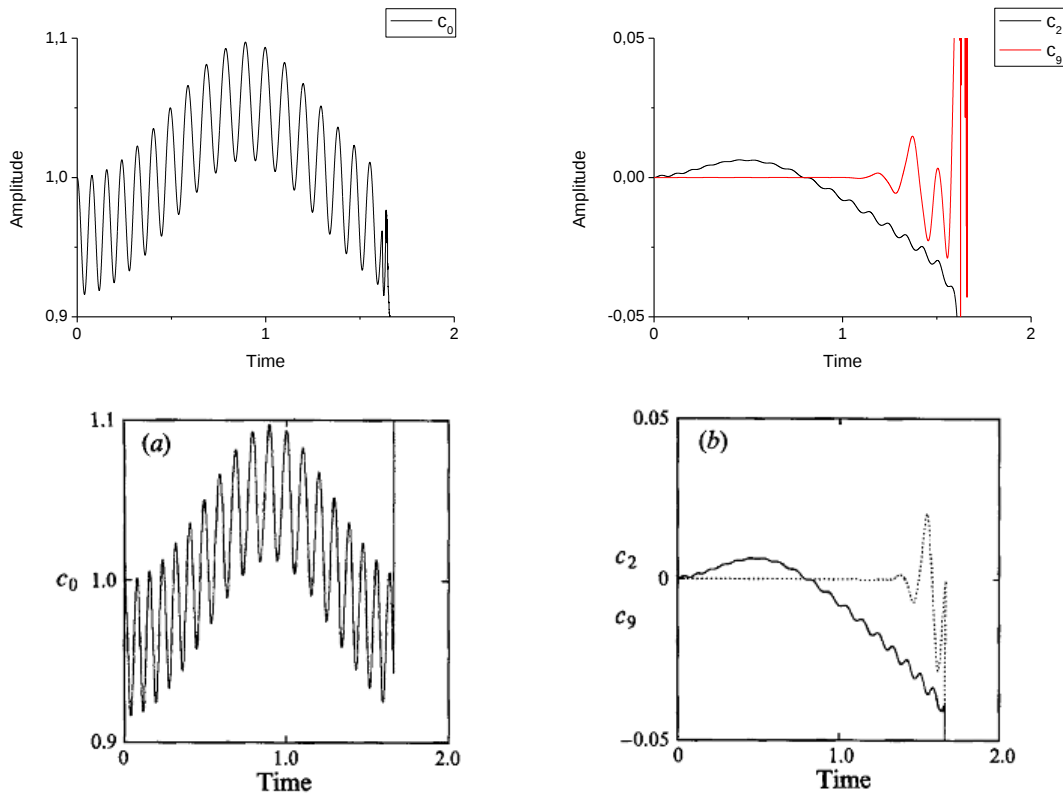


Διάγραμμα 3- 5: Διαγράμματα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας για $d^*=4\text{mm}$ (αριστερά) και $d^*=8\text{mm}$ (δεξιά).

Κατόπιν δοκιμάστηκε η περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο όμοιων αρχικά σφαιρικών φυσαλίδων βυθισμένων μέσα σε νερό, οι οποίες διαταράσσονται με αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής στο πεδίο πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού. Οι παράμετροι της προσομοίωσης ήταν οι εξής:

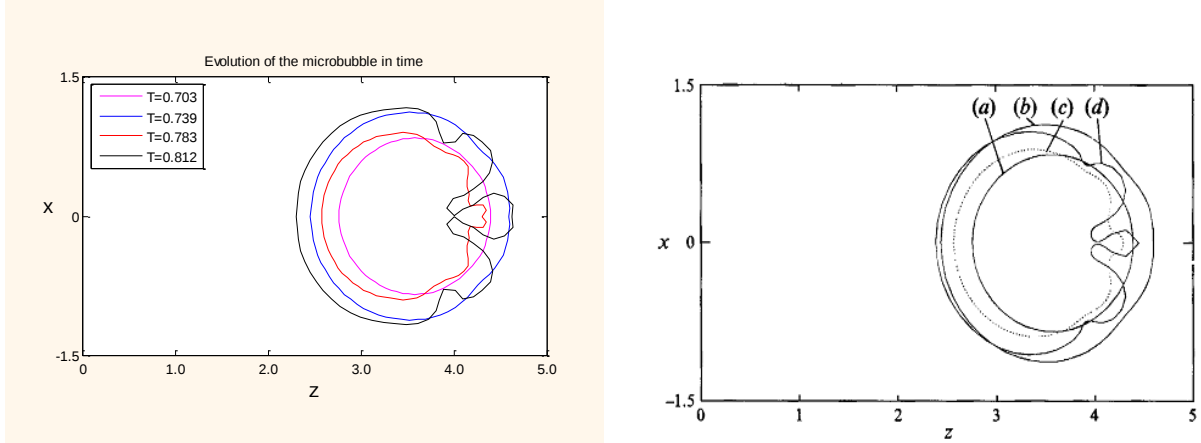
$$R^*=1\text{ mm}, \sigma=0.075\text{ N/m}, \rho_l=1000\text{ kg/m}^3, \gamma=1.4, P_{st}^*=100000\text{ Pa}, \varepsilon=0.2$$

Η αρχική απόσταση μεταξύ των κέντρων μάζας των δύο φυσαλίδων είναι ίση με δύο διαμέτρους, δηλαδή $d^*=8\text{ mm}$, ενώ η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής είναι $\nu_f^*=152\text{ Hz}$

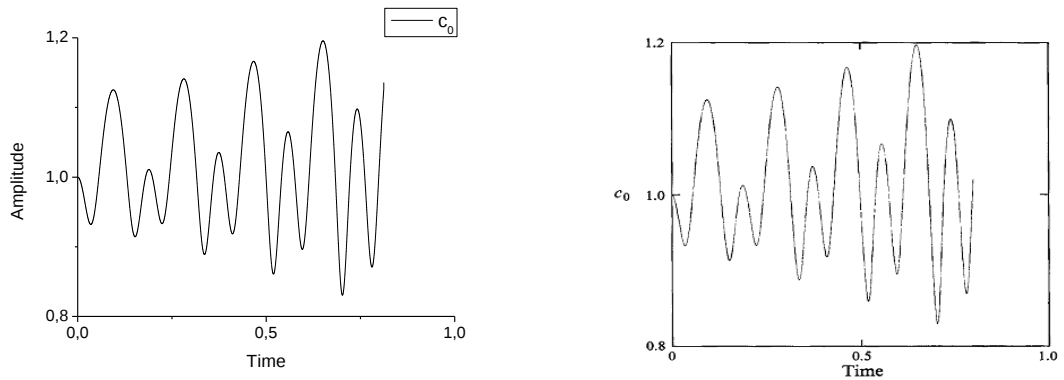


Διάγραμμα 3- 6: Χρονική μεταβολή των συντελεστών Legendre c_0 , c_2 και c_9 , για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=152\text{ Hz}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (πάνω), αντίστοιχα αποτελέσματα από τη βιβλιογραφία (κάτω).

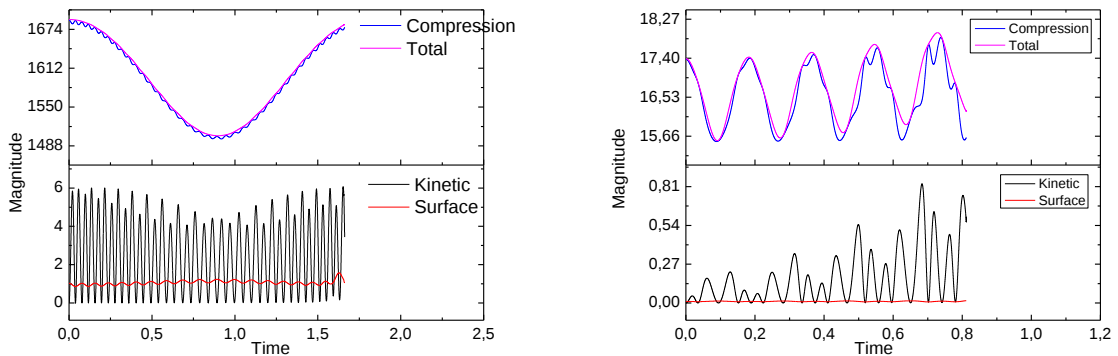
Τέλος, παρατίθενται οι προσομοιώσεις για περίπτωση όμοια με την παραπάνω έχοντας, όμως, συχνότητα εξωτερικής διαταραχής $\nu_f^* = 1503 \text{ Hz}$.



Διάγραμμα 3- 7: Χρονική εξέλιξη σχήματος των δύο φυσαλίδων στο τελικό στάδιο της προσομοίωσης, για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=1503 \text{ Hz}$. Αποτέλεσμα προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχο γράφημα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).



Διάγραμμα 3- 8: Διαγράμματα ταλαντώσεων όγκου της φυσαλίδας, για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=1503 \text{ Hz}$. Αποτελέσματα της προσομοίωσης (αριστερά), αντίστοιχα διαγράμματα από τη βιβλιογραφία (δεξιά).



Διάγραμμα 3- 9: Διαγράμματα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας για $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=152 \text{ Hz}$ (αριστερά) και $d^*=8\text{mm}$ και $\nu_f^*=1503 \text{ Hz}$ (δεξιά).

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρείται πολύ καλή συμφωνία των προσομοιώσεων με τις αντίστοιχες στη βιβλιογραφία. Οι φυσαλίδες έλκονται μεταξύ τους λόγω της επίδρασης των δευτερευουσών δυνάμεων Bjerknes και εμφανίζουν πολύ παρόμοια συμπεριφορά στο στάδιο της κατάρρευσης. Επιπλέον, τα διαγράμματα ταλαντώσεων όγκου της φυσαλίδας αναπαράγονται με πολύ μεγάλη ακρίβεια όπως επίσης και τα διαγράμματα που απεικονίζουν τους συντελεστές Legendre.

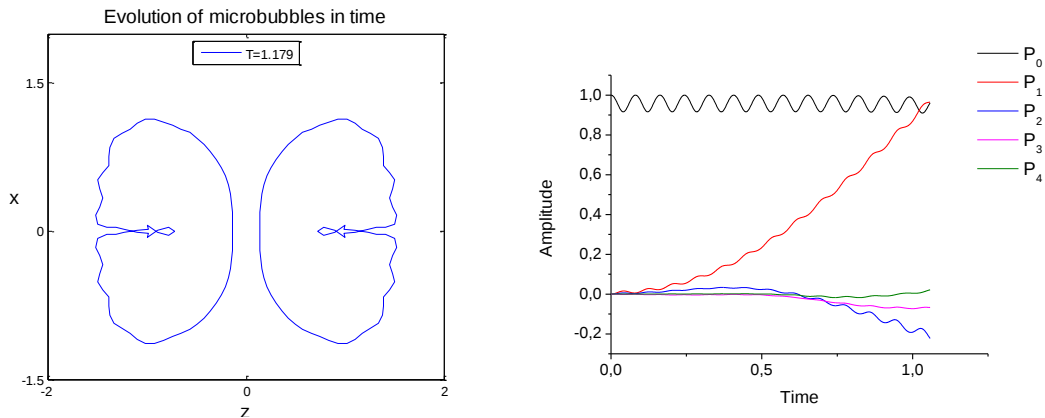
Τέλος, ενδεικτικό της ορθότητας της αριθμητικής μεθοδολογίας, για την περίπτωση της βηματικής αλλαγής της πίεσης, είναι ότι καθ' όλη τη διάρκεια των προσομοιώσεων η συνολική ενέργεια παρέμεινε σταθερή, ως όφειλε, λόγω απουσίας μηχανισμού σκέδασης ενέργειας (**Διάγραμμα 3- 5**), ενώ για την περίπτωση της ημιτονοειδούς αλλαγής της πίεσης, η συνολική ενέργεια ταλαντώνεται με περίοδο ίση με αυτή της εξωτερικής διαταραχής (**Διάγραμμα 3- 9**).

4. Αριθμητικά Αποτελέσματα

Αρχικά παρατίθεται η περίπτωση που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.5 για βηματική αλλαγή στην πίεση και απόσταση των κέντρων μάζας των δύο φυσαλίδων $d^* = 4 \text{ mm}$. Οι υπόλοιπες παράμετροι προσομοίωσης είναι:

$$R^* = 1 \text{ mm}, \sigma = 0.075 \text{ N/m}, \rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3, \gamma = 1.4, P_{st}^* = 100000 \text{ Pa}, \nu_0^* = 3267 \text{ Hz}, \varepsilon = 0.2$$

Η προσομοίωση με χρήση του υπάρχοντα κώδικα προχώρησε περαιτέρω στο χρόνο. Οι φυσαλίδες πλησιάζουν εγγύτερα η μία στην άλλη, ενώ στο τμήμα τους, που βρίσκεται αντίθετα στην κίνηση, δημιουργείται υγρή δέσμη υψηλής ταχύτητας (jet). Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης των φυσαλίδων παρατηρείται αρμονικός συντονισμός της ιδιομορφής P_2 η οποία στα τελευταία στάδια της προσομοίωσης αυξάνεται σημαντικά (**Διάγραμμα 4- 1**). Η τελευταία ιδιομορφή αναπτύσσεται λόγω της ιδιοσυχνότητάς της για ταλαντώσεις σχήματος. Η ιδιομορφή P_1 , η οποία εκφράζει τη μετατόπιση του κέντρου μάζας της φυσαλίδας, αυξάνεται διαρκώς με μη γραμμικό τρόπο, γεγονός που αντανakλά την έλξη των φυσαλίδων λόγω των δευτερευουσών δυνάμεων Bjerknes. Στην ουσία η μία φυσαλίδα κινείται λόγω της επιτάχυνσης του ρευστού που προκαλείται από τις ταλαντώσεις της άλλης.



Διάγραμμα 4- 1: Σχήμα των φυσαλίδων στο τελευταίο στάδιο της προσομοίωσης (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος των φυσαλίδων (δεξιά).

4.1 Φυσαλίδα ακτίνας τάξεως χιλιοστών

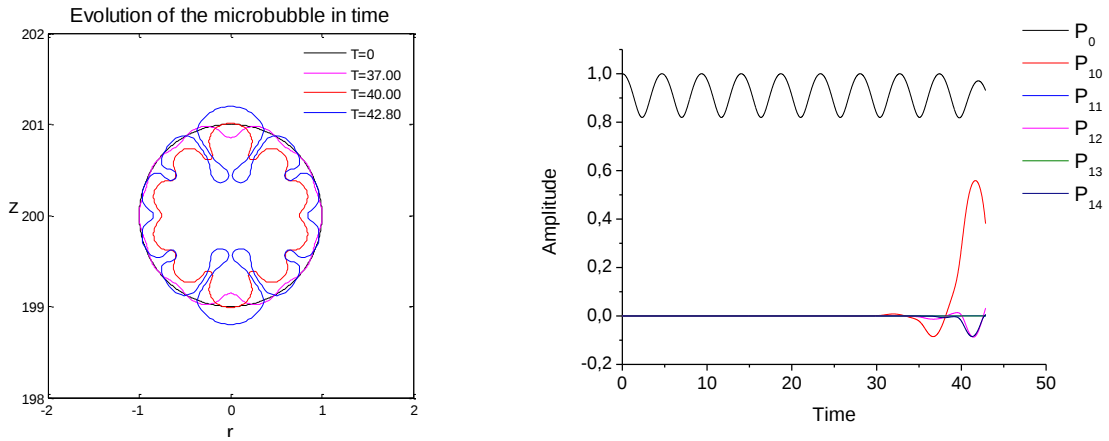
Έγιναν προσομοιώσεις αλληλεπίδρασης φυσαλίδας με γειτονικό στερεό τοίχωμα. Για την περίπτωση αυτή επιλέχθηκε φυσαλίδα με ακτίνα 1 mm και επιβλήθηκαν δύο ειδών μεταβολές της πίεσης στο άπειρο: α) βηματική αλλαγή και β) αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής. Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι:

$$R^* = 1 \text{ mm}, \sigma = 0.075 \text{ N/m}, \rho_l = 998 \text{ kg/m}^3, \gamma = 1.4, P_{st}^* = 101325 \text{ Pa}, \nu_0^* = 3285 \text{ Hz}$$

4.1.1 Βηματική αλλαγή της πίεσης

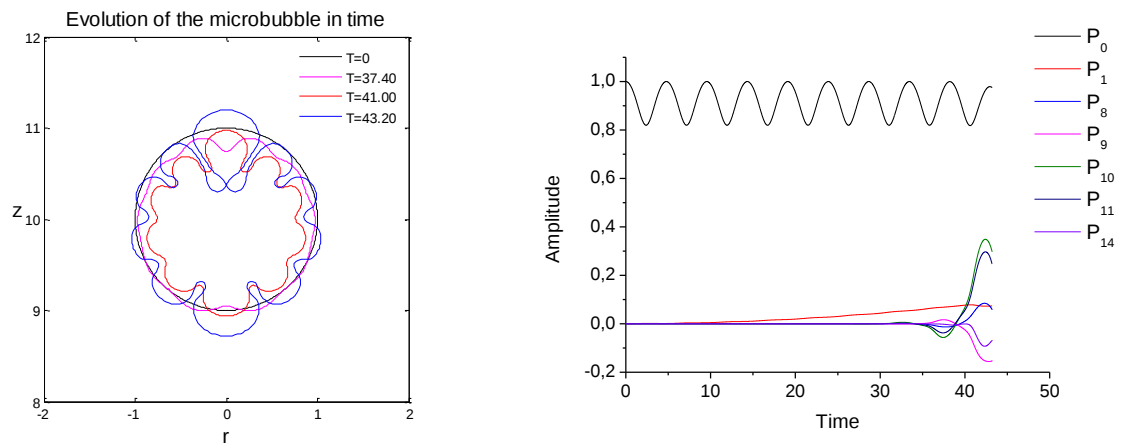
Η αλλαγή της πίεσης στο άπειρο είναι της μορφής: $P_{\infty} = P_{st}(1 + \varepsilon)$. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις για πλάτη διαταραχής: $\varepsilon = 0.5, 1, 2, 3$ και για αποστάσεις από το στερεό τοίχωμα: $d = 100, 5, 1$. Ενδεικτικά παρατίθενται οι περιπτώσεις για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 0.5$.

- $\varepsilon = 0.5, d = 100$:



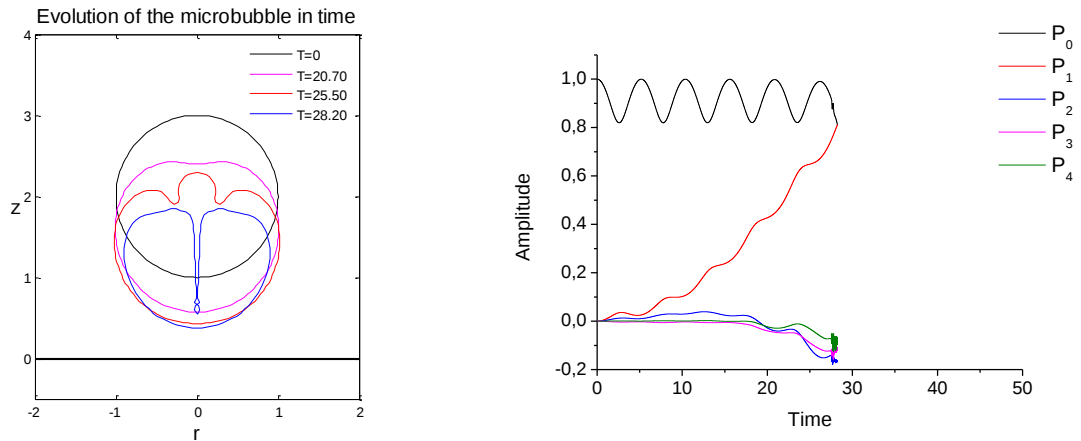
Διάγραμμα 4- 2: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=100$.

- $\varepsilon = 0.5, d = 5$:



Διάγραμμα 4- 3: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=5$.

- $\varepsilon = 0.5$, $d = 1$:



Διάγραμμα 4- 4: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=1$.

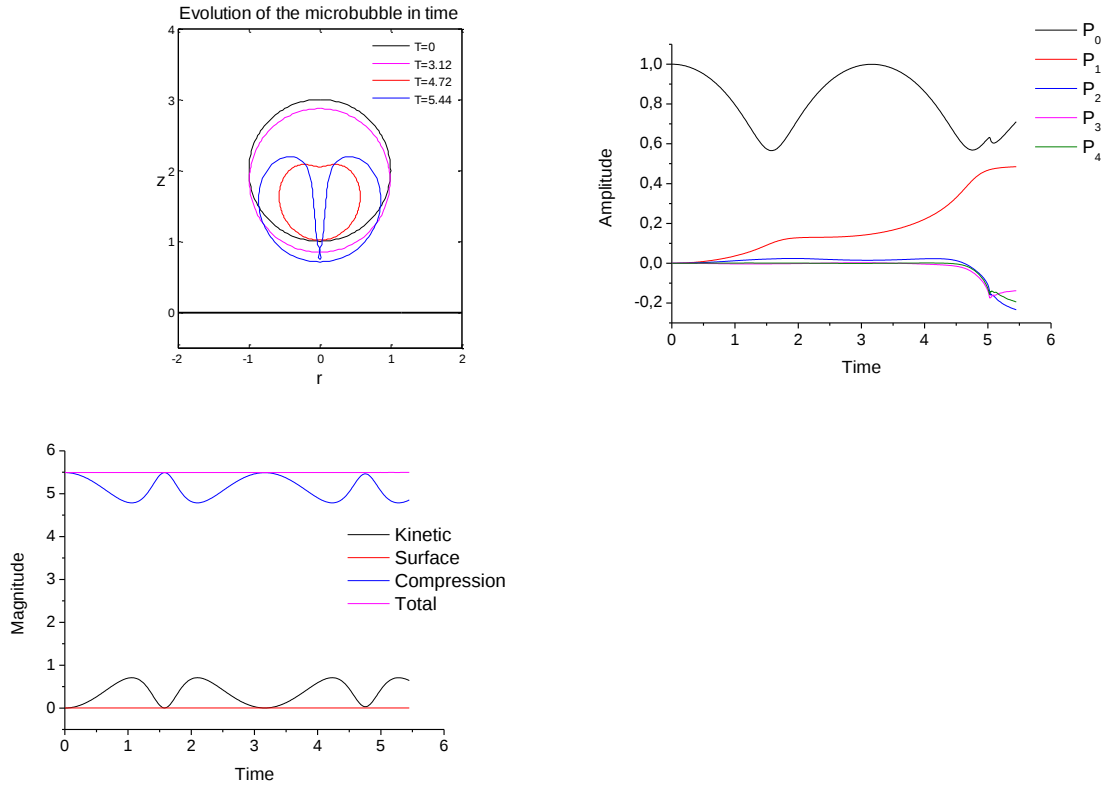
Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρείται ότι οι ταλαντώσεις της φυσαλίδας επηρεάζονται από την ύπαρξη γειτονικού στερεού τοιχώματος. Όσο η απόσταση μεταξύ φυσαλίδας και τοιχώματος μειώνεται, τόσο μεγαλύτερη είναι η έλξη μεταξύ τους η οποία οφείλεται στην επίδραση των δευτερευουσών δυνάμεων Bjerknes. Η ταχύτητα της φυσαλίδας αυξάνεται διαρκώς με μη γραμμικό τρόπο και δεν μπορεί να ανακοπεί λόγω απουσίας ιξώδους στο περιβάλλον ρευστό που θα δρούσε ως μηχανισμός απόσβεσης. Επίσης, η παρουσία του τοιχώματος επηρεάζει την ανάπτυξη ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας. Για παράδειγμα στην περίπτωση πολύ μακριά από το τοίχωμα ($d=100$) η ιδιομορφή που κυριαρχεί είναι η P_{10} ακολουθούμενη από τις P_{12} και P_{14} . Η κυρίαρχη ιδιομορφή είναι έκδηλη στο σχήμα της φυσαλίδας, στο τέλος της προσομοίωσης, με τη μορφή 10 λοβών. Όλες οι προαναφερθείσες ιδιομορφές είναι συμμετρικές. Οι ταλαντώσεις όγκου της φυσαλίδας παραμένουν σταθερές σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης, ενώ προς το τέλος της προσομοίωσης εμφανίζεται υποαρμονικός συντονισμός της ιδιομορφής P_{10} , η οποία τελικά καθορίζει και το σχήμα της φυσαλίδας στο τελικό στάδιο. Ο συντονισμός της P_{10} είναι αναμενόμενος, διότι η συχνότητά της είναι υποδιπλάσια της συχνότητας των ταλαντώσεων όγκου ($\omega_{10} = 36.8$, $\omega_0 = 74.8$). Στο σημείο εκείνο εμφανίζονται περιοχές πολύ μεγάλης καμπυλότητας οι οποίες αναμένεται να οδηγήσουν σε διάρρηξη της φυσαλίδας και σχηματισμό μικρότερων υπό την επίδραση της επιφανειακής τάσης.

Καθώς η απόσταση μεταξύ φυσαλίδας και τοιχώματος ελαττώνεται, διαφορετικές ιδιομορφές γίνονται κυρίαρχες με έμφαση κυρίως στις μη συμμετρικές, δηλαδή ιδιομορφές περιττού αριθμού. Παρατηρώντας τα διαγράμματα για απόσταση $d=5$ προκύπτει ότι στα

τελευταία στάδια της προσομοίωσης οι κυρίαρχες ιδιομορφές είναι η P_{10} και η P_{11} . Δηλαδή πλέον το σχήμα της φουσαλίδας γίνεται μη συμμετρικό, κάτι που γίνεται φανερό στο **Διάγραμμα 4- 3**. Και σε αυτή τη περίπτωση έχουμε σχηματισμό περιοχών πολύ μεγάλης καμπυλότητας, οι οποίες αναμένεται να οδηγήσουν σε διάσπαση της φουσαλίδας σε μικρότερες.

Για την περίπτωση πολύ κοντά στο τοίχωμα ($d=1$) οι ιδιομορφές που αναπτύσσονται είναι οι P_2 , P_3 και P_4 , δηλαδή έχουμε και πάλι ανάπτυξη μη συμμετρικής ιδιομορφής, χαρακτηριστικό της έντονης παρουσίας του γειτονικού τοιχώματος. Η μετατόπιση της φουσαλίδας προς το τοίχωμα είναι εντονότερη γεγονός που υποδεικνύεται από την ανάπτυξη της ιδιομορφής P_1 . Η τελευταία αλληλεπιδρά μη γραμμικά με την P_0 τροφοδοτώντας έτσι τις P_2 και P_3 . Στα τελευταία στάδια της προσομοίωσης παρατηρείται διαφορετικός τρόπος κατάρρευσης από τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Δημιουργείται υγρή δέσμη υψηλής ταχύτητας (jet) στο τμήμα της φουσαλίδας που βρίσκεται μακριά από το τοίχωμα, με κατεύθυνση προς το τοίχωμα, η οποία τείνει να δημιουργήσει φουσαλίδα τοροειδούς μορφής. Η ανάπτυξη του jet παρατηρείται στο τέλος της φάσης συμπίεσης και διασχίζει τη φουσαλίδα κατά τον άξονα συμμετρίας της στη φάση διαστολής (**Διάγραμμα 4- 5**). Ο χρόνος προσομοίωσης είναι μικρότερος και επομένως, δεν υπάρχει χρόνος να εμφανιστούν υψηλότερες ιδιομορφές και μεγάλες παραμορφώσεις της φουσαλίδας, δίνοντας έτσι τη δυνατότητα να δημιουργηθεί το jet. Αντίστροφα, όσο αργεί η εμφάνιση jet δίνεται χρόνος στον συντονισμό να τροφοδοτήσει τις υψηλές ιδιομορφές. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η συχνότητα ταλάντωσης μειώνεται, ενώ το πλάτος της διατηρείται σταθερό.

Τέλος, για μεγαλύτερα πλάτη διαταραχής τα φαινόμενα που προαναφέρθηκαν εντείνονται, οι χρόνοι προσομοίωσης είναι μικρότεροι και συνεπώς δεν παρατηρείται εύκολα αρμονικός ή υποαρμονικός συντονισμός ιδιομορφών σχήματος. Η έλξη προς το τοίχωμα είναι μεγαλύτερη με αποτέλεσμα η μεταφορική ταχύτητα της φουσαλίδας να είναι υψηλότερη. Η συχνότητα της ταλάντωσης αυξάνεται καθώς επίσης και το εύρος της, ενώ η δημιουργία jet είναι πιθανή και για μεσαίες αποστάσεις από το τοίχωμα. Συνεπώς, όσο επιταχύνεται η φουσαλίδα εμφανίζεται γρήγορα το jet. Επιπλέον, το σύστημα φουσαλίδας – τοιχώματος είναι συντηρητικό, διότι δεν υπάρχει μηχανισμός απόσβεσης ή σκέδασης της ενέργειας. Συνεπώς, η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή. Παρατηρείται εναλλαγή της κινητικής ενέργειας με την ενέργεια συμπίεσης, ενώ η ενέργεια λόγω επιφανειακής τάσης παραμένει πρακτικά αμετάβλητη (**Διάγραμμα 4- 5**).

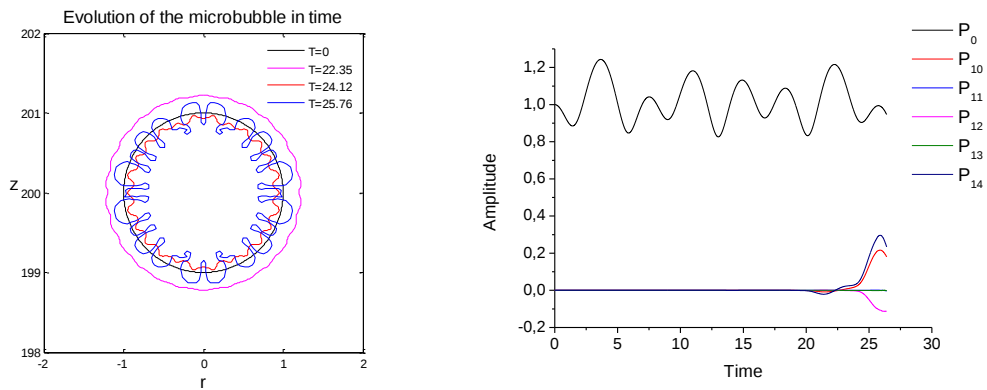


Διάγραμμα 4- 5: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).

4.1.2 Αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής

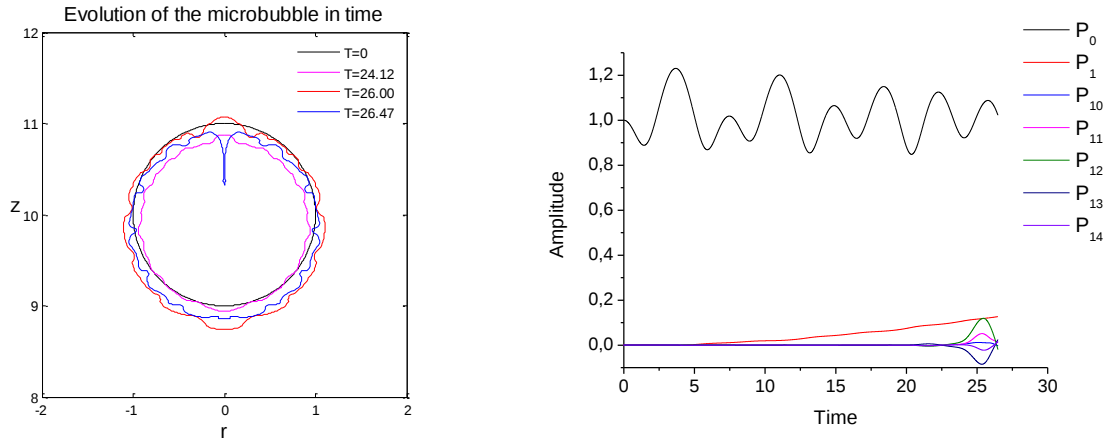
Η αλλαγή της πίεσης στο άπειρο είναι της μορφής: $P_\infty = P_{st} [1 + \varepsilon \cdot \cos(t)]$. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις για πλάτη διαταραχής: $\varepsilon = 0.5, 1, 2, 3$ και για αποστάσεις από το στερεό τοίχωμα: $d = 100, 5, 1$. Ενδεικτικά παρατίθενται οι περιπτώσεις για πλάτος διαταραχής $\varepsilon = 1$. Η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής είναι: $\nu_f^* = 5590 \text{ Hz}$.

- $\varepsilon = 1, d = 100$:



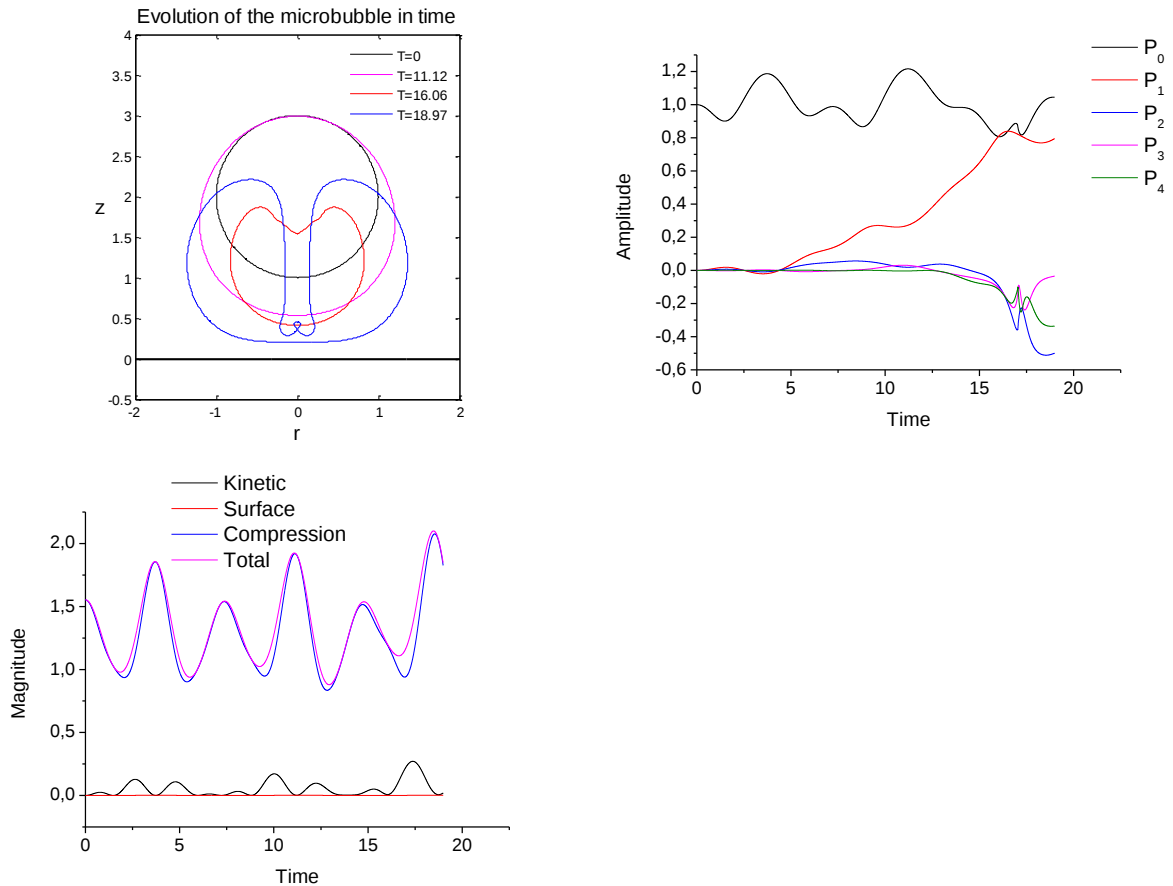
Διάγραμμα 4- 6: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=100$.

- $\varepsilon = 1, d = 5$:



Διάγραμμα 4- 7: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=5$.

- $\varepsilon = 1, d = 1$:

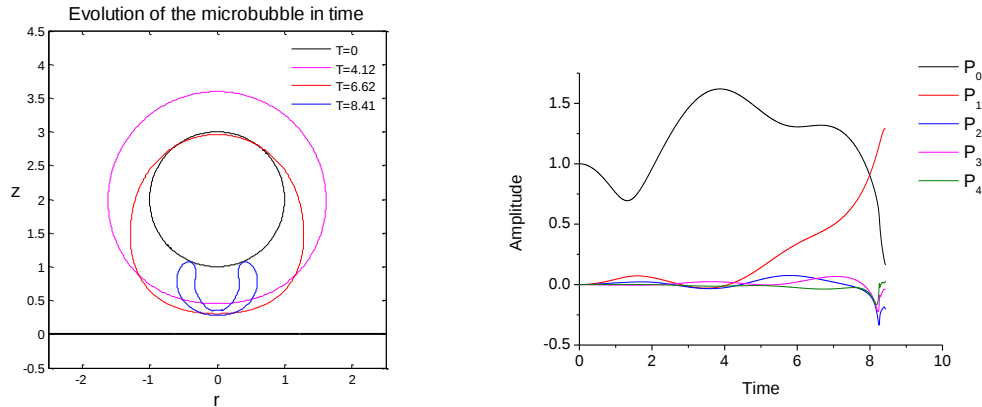


Διάγραμμα 4- 8: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).

Και σ' αυτή την περίπτωση η φουσαλίδα κατευθύνεται προς το τοίχωμα. Η ένταση της έλξης είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Η ταλάντωσή της, όμως, επηρεάζεται και από τη συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής. Παρατηρούνται μεγαλύτερα πλάτη ταλάντωσης σε σχέση με τις αντίστοιχες περιπτώσεις για βηματική αλλαγή της πίεσης και αυτό συμβαίνει, διότι η φουσαλίδα βομβαρδίζεται επαναλαμβανόμενα από την εξωτερική διαταραχή και επομένως τροφοδοτείται με περισσότερη ενέργεια. Για μεγάλη απόσταση από το τοίχωμα παρατηρείται υποαρμονικός συντονισμός της ιδιομορφής P_{14} , η οποία γίνεται κυρίαρχη στα τελευταία στάδια της προσομοίωσης, ακολουθούμενη από την P_{10} και δευτερευόντως από την P_{12} , δίνοντας το σχήμα που φαίνεται στο **Διάγραμμα 4- 6**. Η κυρίαρχη ιδιομορφή είναι διαφορετική από την αντίστοιχη περίπτωση της βηματικής αλλαγής, διότι η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής είναι μεγαλύτερη από την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της φουσαλίδας και κατά συνέπεια είναι εκείνη που καθορίζει την ταλάντωση. Η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής είναι $\omega_f = 128.1$, ενώ της P_{14} είναι $\omega_{14} = 63.7$. Δηλαδή η ιδιοσυχνότητα της P_{14} είναι η μισή της συχνότητας της εξωτερικής διαταραχής, γεγονός που οδηγεί σε υποαρμονικό συντονισμό. Και πάλι δημιουργούνται περιοχές πολύ μεγάλης καμπυλότητας, οι οποίες τείνουν να οδηγήσουν σε διάσπαση της φουσαλίδας σε μικρότερες. Καθώς, όμως, η απόσταση από το τοίχωμα ελαττώνεται, ο μηχανισμός κατάρρευσης διαφοροποιείται. Για μικρή απόσταση από το τοίχωμα παρατηρείται δημιουργία jet στο τμήμα της φουσαλίδας αντίθετο της κίνησης. Η διάρκεια των ταλαντώσεων είναι μικρότερη και επομένως δεν υπάρχει αρκετός χρόνος για να μπορέσουν να αναπτυχθούν υψηλότερες ιδιομορφές που θα κυριαρχήσουν στο σχήμα της φουσαλίδας. Ειδικά στην περίπτωση $d = 1$ (**Διάγραμμα 4- 8**) παρατηρείται ανάπτυξη των χαμηλότερων σφαιρικών αρμονικών και στα τελευταία στάδια της προσομοίωσης δημιουργείται το jet. Επίσης, το πλάτος ταλάντωσης ελαφρώς ελαττώνεται, ενώ αντιθέτως η συχνότητα της ταλάντωσης παραμένει ανεπηρέαστη. Συνεπώς, η ύπαρξη του τοιχώματος μεταβάλλει τη συμπεριφορά της φουσαλίδας σε σχέση με αυτή στο άπειρο.

Τέλος, για μεγαλύτερα πλάτη διαταραχής η διάρκεια της ταλάντωσης μειώνεται. Τα φαινόμενα εντείνονται και επισπεύδονται. Παρατηρείται δημιουργία jet ακόμα και για μεσαίες αποστάσεις, π.χ. $d = 5$, ενώ το τελευταίο εμφανίζεται αρκετά αμβλύ για μεγάλα πλάτη διαταραχής (**Διάγραμμα 4- 9**). Η έλξη μεταξύ φουσαλίδας και τοιχώματος είναι εντονότερη, λόγω της ισχυρότερης ταλάντωσης της πρώτης με αποτέλεσμα η μεταφορική ταχύτητα να είναι αρκετά υψηλότερη. Κλείνοντας, η συνολική ενέργεια του συστήματος φουσαλίδας – τοιχώματος δεν παραμένει σταθερή. Αντιθέτως, ταλαντώνεται με περίοδο ίση με αυτή της εξωτερικής διαταραχής (**Διάγραμμα 4- 8**). Το πλάτος ταλάντωσης της ενέργειας δεν παραμένει

απαραιτήτως σταθερό και καθώς η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής πλησιάζει τη φυσική συχνότητα ταλαντώσεων όγκου της φυσαλίδας, αυτό αυξάνει.



Διάγραμμα 4- 9: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=3$ και $d=1$.

4.2 Φυσαλίδα ακτίνας τάξεως μικρομέτρων

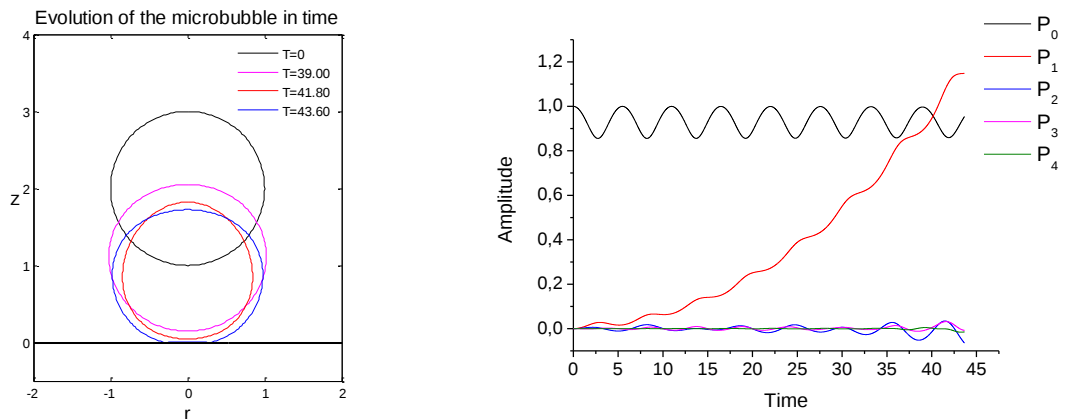
Για την περίπτωση αυτή επιλέχθηκε φυσαλίδα με ακτίνα $3.6 \mu m$ και επιβλήθηκαν δύο ειδών μεταβολές της πίεσης στο άπειρο: α) βηματική αλλαγή και β) αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής. Οι παράμετροι της προσομοίωσης είναι:

$$R^* = 3.6 \mu m, \sigma = 0.075 \frac{N}{m}, \rho_l = 998 \frac{kg}{m^3}, \gamma = 1.4, P_{st}^* = 101325 Pa, \nu_0^* = 1.05 MHz$$

4.2.1 Βηματική αλλαγή της πίεσης

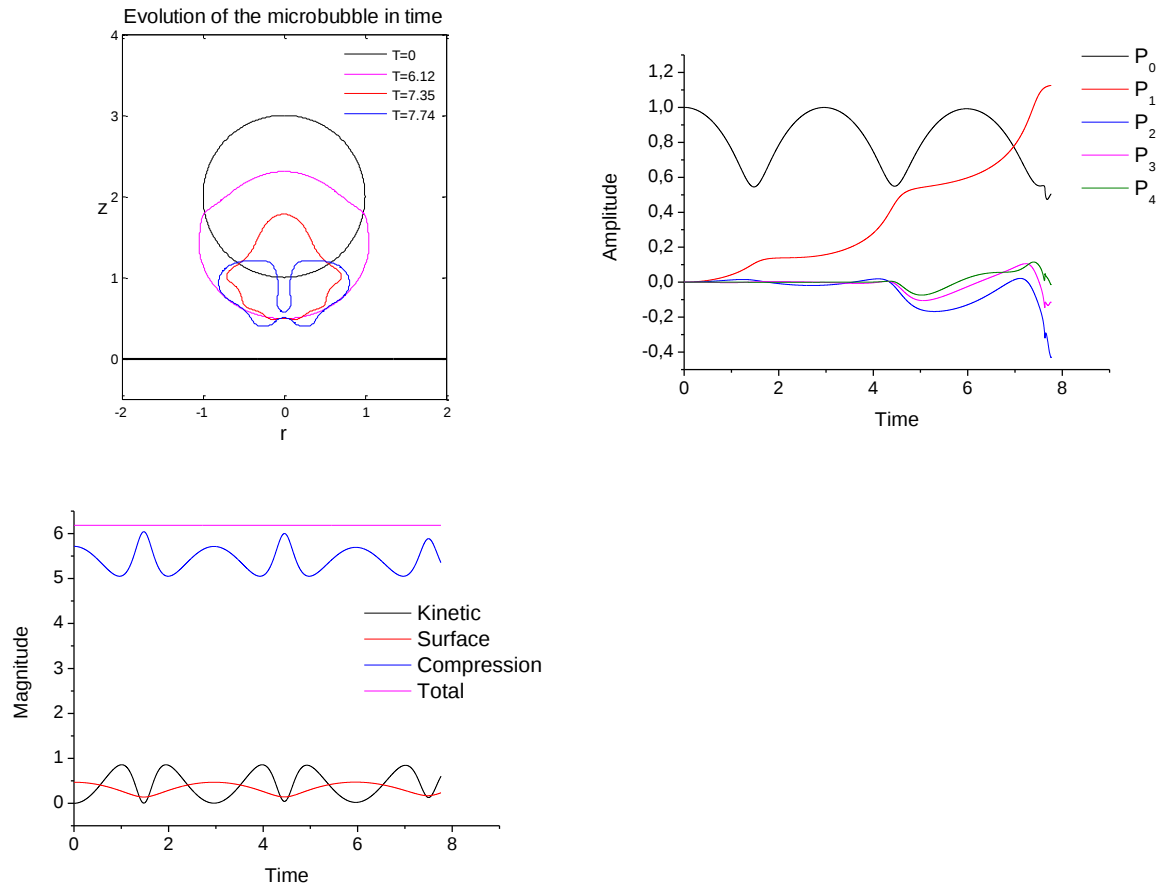
Η αλλαγή της πίεσης στο άπειρο είναι της μορφής: $P_\infty = P_{st}(1 + \varepsilon)$. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις για πλάτη διαταραχής: $\varepsilon = 0.5, 1, 2, 3$ και για απόσταση από το στερεό τοίχωμα: $d = 1$. Ενδεικτικά παρατίθεται οι περιπτώσεις για πλάτη διαταραχής $\varepsilon = 0.5$ και $\varepsilon = 3$.

- $\varepsilon = 0.5, d = 1$:



Διάγραμμα 4- 10: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=0.5$ και $d=1$.

- $\varepsilon = 3, d = 1$:



Διάγραμμα 4- 11: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=3$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).

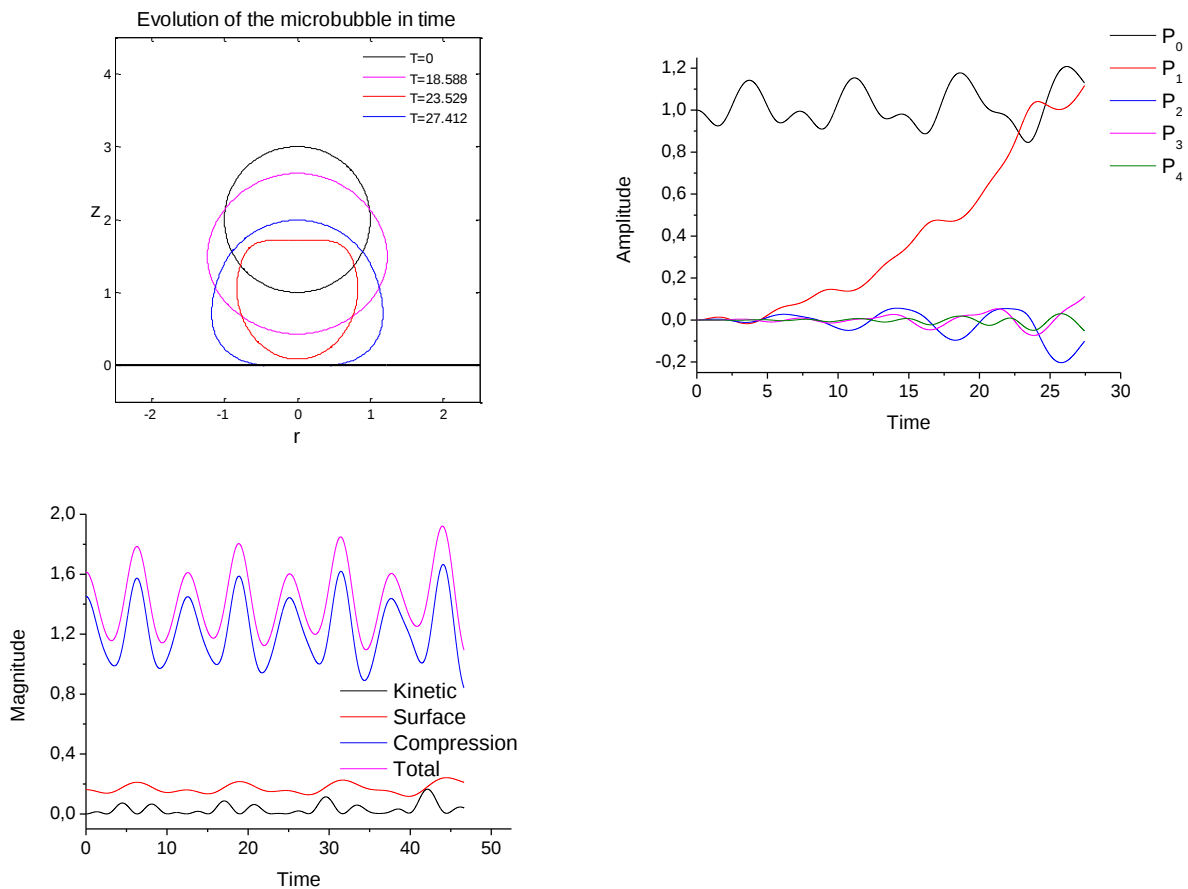
Για μικρά πλάτη διαταραχής δεν παρατηρείται δημιουργία jet, ούτε ανάπτυξη υψηλών αρμονικών να κυριαρχούν στο σχήμα της μικροφυσαλίδας. Λόγω του μεγέθους της φυσαλίδας, η επιφανειακή τάση είναι πολύ μεγαλύτερη και εμποδίζει τη δημιουργία jet. Επομένως, η μικροφυσαλίδα πλησιάζει πολύ κοντά στο τοίχωμα διατηρώντας το σφαιρικό της σχήμα. Κατά το τέλος της προσομοίωσης παρατηρείται μικρή αύξηση της ιδιομορφής P_2 , η οποία εμφανίζεται κυρίως στη φάση συμπίεσης της μικροφυσαλίδας (**Διάγραμμα 4- 10**). Αυξάνοντας το πλάτος της διαταραχής η συχνότητα της ταλάντωσης επίσης αυξάνεται, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται εντονότερα η προαναφερθείσα ιδιομορφή, ακολουθούμενη από τις P_3 και P_4 . Παρατηρείται δημιουργία jet στο τμήμα της μικροφυσαλίδας που είναι αντίθετο της κίνησης, ενώ το τμήμα που βρίσκεται απέναντι από το τοίχωμα δεν διατηρεί το σφαιρικό του σχήμα, όπως συνέβαινε στις φυσαλίδες με ακτίνα 1 mm . Η κίνηση του περιβάλλοντος ρευστού είναι τέτοια που εμποδίζει την προσέγγιση της μικροφυσαλίδας στο τοίχωμα, με αποτέλεσμα να παραμορφώνει το μπροστινό τμήμα της (**Διάγραμμα 4- 11**). Επίσης, μία σημαντική

διαφοροποίηση από τις φυσαλίδες χιλιοστού είναι ότι το jet δημιουργείται και αναπτύσσεται κυρίως στη φάση συμπίεσης, σε αντίθεση με τις πρώτες στις οποίες η ανάπτυξη λαμβάνει χώρα κατά τη διαστολή. Η συγκεκριμένη συμπεριφορά είναι χαρακτηριστική περίπτωση αστάθειας Rayleigh – Taylor. Το σύστημα μικροφυσαλίδας – τοιχώματος είναι επίσης συντηρητικό με αποτέλεσμα η συνολική ενέργεια να διατηρείται. Υπάρχει εναλλαγή της κινητικής με την ενέργεια συμπίεσης, ενώ τώρα η ενέργεια λόγω επιφανειακής τάσης δεν θεωρείται αμετάβλητη (Διάγραμμα 4- 11).

4.2.2 Αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής

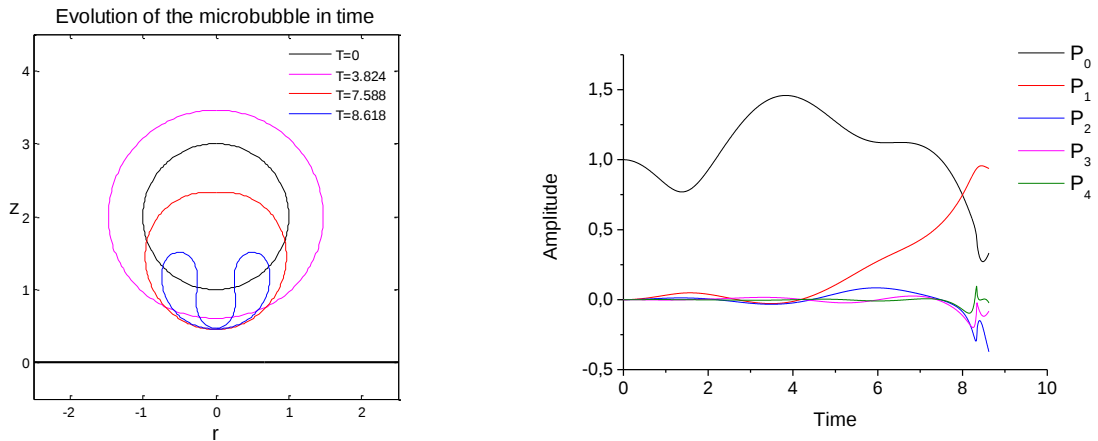
Η αλλαγή της πίεσης στο άπειρο είναι της μορφής: $P_{\infty} = P_{st} [1 + \varepsilon \cdot \cos(t)]$. Εξετάστηκαν οι περιπτώσεις για πλάτη διαταραχής: $\varepsilon = 0.5, 1, 2, 3$ και για απόσταση από το στερεό τοίχωμα: $d=1$. Ενδεικτικά παρατίθενται οι περιπτώσεις για πλάτη διαταραχής $\varepsilon=1$ και $\varepsilon=3$. Η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής είναι: $\nu_f^* = 1.78 \text{ MHz}$.

- $\varepsilon=1, d=1$:



Διάγραμμα 4- 12: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (πάνω αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (πάνω δεξιά) για $\varepsilon=1$ και $d=1$, διάγραμμα χρονικής εξέλιξης κινητικής ενέργειας, ενέργειας επιφάνειας, ενέργειας συμπίεσης και συνολικής ενέργειας (κάτω αριστερά).

- $\varepsilon = 3, d = 1$:



Διάγραμμα 4- 13: Χρονική εξέλιξη του σχήματος της φυσαλίδας (αριστερά), διάγραμμα χρονικής εξέλιξης των ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας (δεξιά) για $\varepsilon=3$ και $d=1$.

Και στην περίπτωση μικροφυσαλίδων με ακτίνα της τάξης μm δεν παρατηρείται δημιουργία jet για μικρά πλάτη διαταραχών. Η μικροφυσαλίδα κινείται προς το τοίχωμα εμφανίζοντας ελαφρώς παραμορφωμένο σχήμα κυριαρχούμενο από την ιδιομορφή P_2 και δευτερευόντως από την P_3 . Η ταλάντωση της μικροφυσαλίδας επηρεάζεται από τη συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μεγαλύτερο κυρίως κατά τη φάση διαστολής (**Διάγραμμα 4- 12**). Για μεγαλύτερα πλάτη διαταραχής δημιουργείται jet, ωστόσο το κατώφλι έναρξης είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο των φυσαλίδων χιλιοστού. Το jet είναι πιο αμβλύ σε σχέση με αυτό που δημιουργείται σε βηματική αλλαγή της πίεσης, καθώς επίσης το τμήμα που βρίσκεται απέναντι από το τοίχωμα διατηρεί το σφαιρικό του σχήμα, ομοιάζοντας με τις αντίστοιχες περιπτώσεις της φυσαλίδας χιλιοστού. Όμως και εδώ παρατηρείται συμπεριφορά που παραπέμπει σε αστάθεια Rayleigh – Taylor. Τέλος, η συνολική ενέργεια ταλαντώνεται με περίοδο ίση με αυτή της εξωτερικής διαταραχής (**Διάγραμμα 4- 13**).

5. Συμπεράσματα και Προτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετήθηκε η αλληλεπίδραση φυσαλίδων χωρίς περίβλημα με γειτονικό στερεό τοίχωμα παρουσία ακουστικών διαταραχών. Εξετάστηκαν δύο μεγέθη φυσαλίδων: i) φυσαλίδα με ακτίνα 1 mm και ii) φυσαλίδα με ακτίνα $3.6\text{ }\mu\text{m}$. Επιβλήθηκαν δύο ειδών διαταραχές: α) βηματική αλλαγή της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού στο άπειρο και β) αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής στο άπειρο. Επιλέχθηκαν τέσσερα πλάτη διαταραχών ($\varepsilon = 0.5, 1, 2, 3$) και τρεις αρχικές αποστάσεις από το γειτονικό τοίχωμα ($d = 100, 5, 1$) προκειμένου να διερευνηθεί η επίδρασή τους στις ταλαντώσεις των φυσαλίδων και στον τρόπο κατάρρευσής τους. Θεωρήθηκε αξονική συμμετρία και αναπτύχθηκε κώδικας συνοριακών στοιχείων για την υλοποίηση των προσομοιώσεων. Το σύστημα που επιλέχθηκε να γίνει η επίλυση ήταν το κυλινδρικό (r, z) , όπου ο άξονας z ήταν και ο άξονας συμμετρίας, ενώ ο άξονας r τοποθετήθηκε πάνω στο τοίχωμα.

Όπως αποδείχθηκε από την παραμετρική μελέτη, η αρχική απόσταση από το γειτονικό στερεό τοίχωμα καθώς επίσης και το πλάτος της εξωτερικής διαταραχής επηρεάζει τις ταλαντώσεις της φυσαλίδας και τον τρόπο κατάρρευσής της. Πιο συγκεκριμένα:

- ❖ Μείωση της αρχικής απόστασης από το τοίχωμα ενισχύει τις δευτερεύουσες δυνάμεις Bjerknes κάνοντας την έλξη της φυσαλίδας προς το τοίχωμα εντονότερη, ενώ παράλληλα αναπτύσσεται μεγαλύτερη μεταφορική ταχύτητα.
- ❖ Για βηματική αλλαγή της πίεσης, μείωση της αρχικής απόστασης από το τοίχωμα ελαττώνει τη συχνότητα ταλάντωσης της φυσαλίδας, ενώ το πλάτος της παραμένει σταθερό. Αντιθέτως, για αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής, η ελάττωση της απόστασης μειώνει το πλάτος ταλάντωσης και αφήνει ανεπηρέαστη της συχνότητά της.
- ❖ Η μείωση της αρχικής απόστασης επηρεάζει την ανάπτυξη ιδιομορφών σχήματος της φυσαλίδας, με αποτέλεσμα να διαφοροποιείται ο μηχανισμός κατάρρευσής της.
- ❖ Διακρίνονται τρεις μηχανισμοί κατάρρευσης: α) παραμόρφωση του σχήματος της φυσαλίδας λόγω υποαρμονικού συντονισμού υψηλής ιδιομορφής με αποτέλεσμα τη διάσπαση της φυσαλίδας σε μικρότερες, β) δημιουργία jet στην φάση διαστολής με σχηματισμό τελικά φυσαλίδας τοροειδούς μορφής και γ) αστάθεια Rayleigh – Taylor που εμφανίζεται με δημιουργία jet στο τέλος της φάσης συστολής της φυσαλίδας.
- ❖ Για μεγάλες αποστάσεις ο χρόνος προσομοίωσης είναι ικανός για να οδηγήσει σε αρμονικό ή υποαρμονικό συντονισμό της κυριαρχούσας ιδιομορφής με τις ταλαντώσεις όγκου της φυσαλίδας, με αποτέλεσμα η ιδιομορφή να αποτυπώνεται στο σχήμα της φυσαλίδας κατά τα

- τελευταία στάδια της προσομοίωσης. Οι ιδιομορφές που αναπτύσσονται είναι ως επί το πλείστον συμμετρικές και δημιουργούν σχήμα άρτιου αριθμού λοβών στη φυσαλίδα. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει δημιουργία περιοχών πολύ μεγάλης καμπυλότητας, οι οποίες οδηγούν σε διάσπαση της φυσαλίδας σε μικρότερες.
- ❖ Για μικρές αποστάσεις ο χρόνος προσομοίωσης είναι μικρότερος και δεν επαρκεί για να εμφανιστεί συντονισμός υψηλών ιδιομορφών. Αντιθέτως, γίνεται ανάπτυξη χαμηλότερων σφαιρικών αρμονικών και εμφανίζονται ιδιομορφές μη συμμετρικές. Σε αυτή την περίπτωση, δημιουργείται υγρή δέσμη υψηλής ταχύτητας (jet) στο τμήμα της φυσαλίδας που είναι αντίθετο της κίνησης και διασχίζει τη φυσαλίδα κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της με κατεύθυνση προς το τοίχωμα, οδηγώντας σε σχηματισμό φυσαλίδας τοροειδούς μορφής. Η δημιουργία του jet συμβαίνει στο τέλος της φάσης συμπίεσης και αναπτύσσεται στη φάση διαστολής.
 - ❖ Αύξηση του πλάτους διαταραχής, εντείνει και επισπεύδει τα φαινόμενα. Συνεπώς, η διάρκεια της προσομοίωσης ελαττώνεται. Επιπροσθέτως, για βηματική αλλαγή της πίεσης παρατηρείται αύξηση της συχνότητας ταλάντωσης της φυσαλίδας, ενώ για αλλαγή ημιτονοειδούς μορφής η συχνότητα παραμένει αμετάβλητη.
 - ❖ Η αλλαγή της πίεσης ημιτονοειδούς μορφής στο περιβάλλον ρευστό οδηγεί σε σχηματισμό jet ακόμα και για μεσαίες αποστάσεις (π.χ. $d = 5$), κάτι που δεν παρατηρείται για βηματική αλλαγή, όπου το jet δημιουργείται για μικρές αποστάσεις (π.χ. $d = 1$). Επιπλέον, το jet που δημιουργείται στην πρώτη περίπτωση είναι πιο αμβλύ σε σχέση με το αντίστοιχο της δεύτερης.
 - ❖ Οι φυσαλίδες τάξεως μικρομέτρων χρειάζονται μεγαλύτερα πλάτη διαταραχών, από τις αντίστοιχες τάξεως χιλιοστών, προκειμένου να εμφανίσουν jet. Η επιφανειακή τάση είναι σημαντικότερη και σταθεροποιεί τις ταλαντώσεις των μικροφυσαλίδων. Συνεπώς, απαιτείται μεγαλύτερη ενέργεια για να υπάρξουν προϋποθέσεις δημιουργίας jet.
 - ❖ Στις φυσαλίδες τάξεως μικρομέτρων το jet δημιουργείται και αναπτύσσεται εξ ολοκλήρου στη φάση συστολής, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες τάξεως χιλιοστών στις οποίες η ανάπτυξη του jet γίνεται στη φάση διαστολής, γεγονός που χαρακτηρίζεται ως αστάθεια Rayleigh – Taylor.
 - ❖ Τέλος, οι φυσαλίδες τάξεως μικρομέτρων, για βηματική αλλαγή της πίεσης στο περιβάλλον ρευστό, δε διατηρούν το σφαιρικό τους σχήμα στο τμήμα που βρίσκεται απέναντι από το τοίχωμα, σε αντίθεση με τις αντίστοιχες τάξεως χιλιοστών που το διατηρούν.

Περαιτέρω, θα πρέπει να διερευνηθεί η επίδραση αρχικής ασυμμετρίας της φυσαλίδας στη δυναμική συμπεριφορά και στον τρόπο κατάρρευσής της. Δηλαδή, να μελετηθούν φυσαλίδες, είτε χιλιοστών, είτε μικρομέτρων, οι οποίες δεν είναι αρχικά σφαιρικές και να εξεταστεί το κατά πόσο το μέγεθος της αρχικής ασυμμετρίας επηρεάζει τις ταλαντώσεις, αλλά και τον τρόπο κατάρρευσης των φυσαλίδων.

Επιπλέον, θα πρέπει να πραγματοποιηθεί αντίστοιχη παραμετρική μελέτη για την αλληλεπίδραση φυσαλίδας χωρίς ελαστικό περίβλημα με γειτονική ελεύθερη επιφάνεια για διάφορα πλάτη διαταραχής, αλλά και διαφορετικές αποστάσεις της πρώτης από τη δεύτερη.

Επίσης, παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον η μελέτη φυσαλίδων χωρίς περίβλημα με γειτονική ελαστική επιφάνεια, όπου η τελευταία μπορεί να θεωρηθεί είτε ως ημιάπειρο χωρίο, είτε ως λεπτότοιχο και να θεωρηθεί μη γραμμική ελαστικότητα. Η περίπτωση αυτή βρίσκει πρακτική εφαρμογή στη διαγνωστική ιατρική με χρήση υπερήχων, όπου φυσαλίδες μικρομέτρων βομβαρδίζονται με υπέρηχους, ταλαντώνονται και αλληλεπιδρούν με το τοίχωμα αιμοφόρων αγγείων.

Τέλος, θα ήταν πολύ χρήσιμη η ανάπτυξη τρισδιάστατου αριθμητικού μοντέλου, με το οποίο θα μπορέσει να μελετηθεί βαθύτερα και πιο ολοκληρωμένα η δυναμική συμπεριφορά καθώς επίσης και ο μηχανισμός κατάρρευσης της φυσαλίδας.

Αναφορές – Βιβλιογραφία

- [1] C. E. Brennen, *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford U. Press, New York (1995).
- [2] L. Guerri, G. Lucca & A. Prosperetti, “A numerical method for the dynamics of non-spherical cavitation bubbles”, In D.H. LeCroisette (ed.) *proceedings of the 2nd International Colloquium on Drops and Bubbles*. Pasadena (CA): Jet Propulsion Laboratory (Publ. 82-7), 175-181 (1982).
- [3] J. R. Blake, B.B. Taib & G. Doherty, “Transient cavities near boundaries. Part 1. Rigid Boundary”, *J. Fluid Mechanics*, **170**, 479-497 (1986).
- [4] Y. Tomita & A. Shima, “Mechanisms of impulsive pressure generation and damage pit formation by bubble collapse”, *J. Fluid Mech.* **169**, 535-564 (1986).
- [5] A. Philipp, & W. Lauterborn, “Cavitation erosion by single laser-produced bubbles,” *J. Fluid Mech.* **361**, 75-116 (1998).
- [6] A. Pearson, J.R. Blake & S.R. Otto, “Jets in bubbles”, *Journal of Engineering Mechanics* **48**, 391-412 (2004).
- [7] O. Lindau & W. Lauterborn, “Cinematographic observation of the collapse and rebound of a laser-produced cavitation bubble near a wall”, *J. Fluid Mech.* **479**, 327-348 (2003).
- [8] C. D. Ohl, T. Kurz, R. Geisler, O. Lindau & W. Lauterborn, “Bubble dynamics, shock waves and sonoluminescence,” *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **357**, 269-294 (1999).
- [9] A. Prosperetti, “A new mechanism for sonoluminescence”, *J. Acoust. Soc. Am.* **101**(4), 2003-2007 (1997).
- [10] S. Hilgenfeldt, D. Lohse, and H. P. Brenner, “Phase diagrams for sonoluminescing bubbles,” *Phys. Fluids* **8**, 2608 _1996_; erratum, *ibid.* **9**, 2462 1996.
- [11] C. D. Ohl, O. Lindau & W. Lauterborn, “Luminescence from spherically and aspherically collapsing laser bubbles,” *Phys. Rev. Lett.* **80**(2), 393-396 (1998).
- [12] T. B. Benjamin & A. T. Ellis, “The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby produced against solid boundaries“, *Phil. Trans. R. Soc. A.* **260**, 221- (1966).
- [13] J.R. Blake, M.C. Hooton, P.B. Robinson, & R.P Tong, “Collapsing cavities, toroidal bubbles and jet impact”, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* **355**, 537-550 (1997).
- [14] J. P. Best “The formation of toroidal bubbles upon the collapse of transient cavities”, *J. Fluid Mech.* **251**, 79-107 (1993).
- [15] P. Prentice, A. Cuschieri, K. Dholakia, M. Prausnitz, and P. Campbell, “Membrane disruption by optically controlled microbubble cavitation”, *Nature Phys.* **1**, 107-110 (2005).

- [16] C-D. Ohl, et al., “Sonoporation from Jetting Cavitation Bubbles”, *Biophysic. J.*, **91**, 42854295 (2006).
- [17] P. Marmottant, S. Hilgenfeldt, “A bubble-driven microfluidic transport element for bioengineering”, *Proc. Nat. Academ. Sci.*, **101**, 9523-9527 (2004).
- [18] N. A. Pelekasis & J. A. Tsamopoulos, “Bjerknes forces between two bubbles. Part 1. Response to a step change in pressure”, *J. Fluid Mechanics*, vol. **254**, pp. 467-499, (1993)
- [19] N. A. Pelekasis & J. A. Tsamopoulos, “Bjerknes forces between two bubbles. Part 2. Response to an oscillatory pressure field”, *J. Fluid Mechanics*, vol. **254**, pp. 501-527, (1993)
- [20] J. P. Best & A. Kucera, “A numerical investigation of non-spherical rebounding bubbles”, *J. Fluid Mechanics*, vol. **245**, pp. 137-154, (1992).
- [21] R. P. Tong, W. P. Schiffrers, S. J. Shaw, J. R. Blake, D. C. Emmony, “The role of ‘splashing’ in the collapse of a laser-generated cavity near a rigid boundary”, *J. Fluid Mechanics*, vol. **380**, pp. 339-361, (1999).
- [22] E. A. Brujan, G. S. Keen, A. Vogel, J. R. Blake, “The final stage of the collapse of a cavitation bubble close to a rigid boundary”, *Physics of fluids*, vol. **14**, No. 1, (2002).
- [23] P. B. Robinson, J. R. Blake, T. Kodama, A. Shima, Y. Tomita, “Interaction of cavitation bubbles with a free surface”, *J. App. Physics*, vol. **89**, No. 12, (2001).
- [24] A. Pearson, J. R. Blake, S. R. Otto, “Jets in bubbles”, *J. Engineering Mathematics*, **48**, 391-412, (2004).
- [25] H. Chen, W. Kreider, A. A. Brayman, M. R. Bailey, T. J. Matula, “Blood vessel deformations on microsecond time scales by ultrasound cavitation”, *Phys. Rev. Letters*, **106**, 034301, (2011).
- [26] F. Paris, J. Canas, “Boundary Element Method”, Oxford University Press, (1997).
- [27] C. A. Brebbia & J. Dominguez, “Boundary Elements: An introductory course”, Witpress, Computational Mechanics Publications, (1992).
- [28] Pelekasis, N. A. A study on Drop and Bubble Dynamics via a Hybrid Boundary Element - Finite Element Methodology. *Ph.D. Thesis submitted to the Chemical Engineering Department of SUNY Buffalo*, (1991).
- [29] N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos, G. D. Manolis, “Equilibrium shapes and stability of charged and conducting drops”, *Phys. Fluids A*, vol. **2**, No. 8, (1990).
- [30] N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos, G. D. Manolis, “A hybrid finite-boundary element method for inviscid flows with free surface”, *J. Comput. Physics*, **101**, 231-251, (1992).

- [31] A. H. Stroud & D. Secrest, “Gaussian Quadrature Formulas”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1966).
- [32] C. de Boor, “A Practical Guide to Splines”, Springer-Verlag, New York, (1978).
- [33] P. M. Prenter, “Splines and Variational Methods”, Wiley-Interscience publications, (1975).
- [34] L. J. Gray, M. Garzon, V. Mantic, E. Graciani, “Galerkin boundary integral analysis for the axisymmetric Laplace equation”, Int. J. Numer. Meth. Engng (in press), (2005).
- [35] M. Abramowitz & I. A. Stegun, “Handbook of Mathematical functions”, Dover, New York, (1972).
- [36] J. C. Lachat & J. O. Watson, Int. J. Numerical Methods Eng., 10, 991, (1976).
- [37] K. A. Tsigliffis, “Numerical Simulation of Bubbles Dynamics in Response to Acoustic Disturbances”, Ph. D. Thesis submitted to the Mechanical Engineering Department of University of Thessaly, Volos, (2007).
- [38] K. Tsigliffis & N. A. Pelekasis, “Nonlinear oscillations and collapse of elongated bubbles subject to weak viscous effects: Effect of internal overpressure”, Phys. Fluids, **19**, 072106, (2007).
- [39] J. F. Thompson, Z. U. Warsi, W. C. Mastin, “Numerical Grid Generation: Foundations and Applications”, North Holland, (1985).