



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

*ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ & ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ*

Μεταπτυχιακή Εργασία

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΜΙΚΡΟΦΥΣΑΛΙΔΑΣ (Contrast Agents)**

**ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΥΠΕΡΗΧΩΝ**

υπό

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΤΣΙΓΚΛΙΦΗ**

Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης από το Τμήμα  
Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας

2005



## Πίνακας Περιεχομένων

|            |                                                                                     |    |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Κεφάλαιο 1 | Εισαγωγή.....                                                                       | 2  |
| 1.1        | Κίνητρο και Υπόβαθρο.....                                                           | 2  |
| 1.2        | Βιβλιογραφική Ανασκόπηση.....                                                       | 4  |
| 1.3        | Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας.....                                                | 8  |
| Κεφάλαιο 2 | Σφαιροσυμμετρικές Ταλαντώσεις Μικροφυσαλίδας.....                                   | 9  |
| 2.1        | Θεωρητική Ανάλυση.....                                                              | 10 |
| 2.2        | Γραμμικοποίηση του Προβλήματος.....                                                 | 19 |
| 2.3        | Αριθμητική Προσέγγιση.....                                                          | 20 |
| 2.4        | Αποτελέσματα και Συμπεράσματα.....                                                  | 21 |
| Κεφάλαιο 3 | Η Δυναμική της Ταλάντωσης και της Κατάρρευσης της Μικροφυσαλίδας.....               | 36 |
| 3.1        | Θεωρητική Ανάλυση.....                                                              | 37 |
| 3.1.1      | Η Περιγραφή της Διεπιφάνειας της Μικροφυσαλίδας κατά Lagrange....                   | 39 |
| 3.1.2      | Η Ολοκληρωτική Εξίσωση της Διεπιφάνειας της Μικροφυσαλίδας.....                     | 44 |
| 3.2        | Η Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων του Προβλήματος.....                             | 46 |
| 3.2.1      | Η Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στην Επίλυση του Προβλήματος..... | 46 |
| 3.2.2      | Η Εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων στην Επίλυση του Προβλήματος.....   | 47 |
| 3.2.3      | Η Χρονική Ολοκλήρωση των Εξισώσεων.....                                             | 49 |
| 3.2.4      | Η Χρήση Φίλτρων.....                                                                | 49 |
| 3.2.5      | Ο Αλγόριθμος Επίλυσης του Προβλήματος.....                                          | 50 |
| 3.3        | Η Γραμμικοποίηση του Προβλήματος.....                                               | 51 |

|     |                                                                                                                            |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.4 | Αποτελέσματα και Συμπεράσματα για το Πρόβλημα της Δυναμικής της<br>Ταλάντωσης και της Κατάρρευσης της Μικροφουσαλίδας..... | 52 |
|     | Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα και Προτάσεις.....                                                                                 | 60 |
|     | Βιβλιογραφία.....                                                                                                          | 64 |



© 2005 Τσιγκλιφής Κωνσταντίνος

Η έγκριση της μεταπτυχιακής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## **Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Πενταμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:**

|                                 |                                                                                                   |             |                           |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------------------|
| Πρώτος Εξεταστής<br>(Επιβλέπων) | Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος<br>Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα<br>Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας       | Μηχανολόγων | Μηχανικών                 |
| Δεύτερος Εξεταστής              | Δρ. Βαλουγεώργης Δημήτριος<br>Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα<br>Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας | Μηχανολόγων | Μηχανικών                 |
| Τρίτος Εξεταστής                | Δρ. Βλάχος Νικόλαος<br>Καθηγητής, Τμήμα<br>Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας                                 | Μηχανολόγων | Μηχανικών<br>Βιομηχανίας, |
| Τέταρτος Εξεταστής              | Δρ. Καραμάνος Σπυρίδων<br>Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα<br>Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας       | Μηχανολόγων | Μηχανικών                 |
| Πέμπτος Εξεταστής               | Δρ. Μποντόζογλου Βασίλειος<br>Καθηγητής, Τμήμα<br>Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας                          | Μηχανολόγων | Μηχανικών<br>Βιομηχανίας, |





## **Ευχαριστίες**

Ένα από τα πρόσωπα που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας και το οποίο θα ήθελα να ευχαριστήσω για τη συνεργασία που είχαμε, έχουμε και θα έχουμε για αρκετό καιρό ακόμα, είναι ο επιβλέπωντας μου κ. Πελεκάσης Νίκος, ο οποίος με ιδιαίτερο ζήλο, υπομονή και μεθοδικότητα προσπάθησε να μου μεταδώσει τις γνώσεις του. Η στήριξη του δεν ήταν μόνο επιστημονική, αλλά κυρίως ψυχολογική. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για τις προτάσεις τους και τις διορθώσεις τους που αφορούν την παρούσα εργασία. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον μεταδιδάκτορα κ. Βασίλη Σβόρο για τις προτάσεις του και την ενημέρωση που είχα σχετικά με τις μικροφυσαλίδες. Επίσης, θα ήθελα να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στους φίλους μου, Σωτηρία, Ρένα, Μανόλη, Βαγγέλη, Μαρία και Γιώργο για την πολύτιμη ψυχολογική υποστήριξη τους και τις ωραίες στιγμές που περάσαμε αυτά τα χρόνια. Τέλος, θα ήθελα να αφιερώσω την εργασία αυτή σε δύο αγαπητά πρόσωπα που έφυγαν πρόσφατα από τη ζωή: Στη μητέρα μου Κυριακή και στη γιαγιά μου Ελένη, οι οποίες πάντα μου έδιναν ψυχολογική και οικονομική στήριξη όλα αυτά τα χρόνια σπουδών.

# **ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΜΙΚΡΟΦΥΣΑΛΙΔΩΝ (Contrast Agents)**

## **ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΥΠΕΡΗΧΩΝ**

ΤΣΙΓΚΛΙΦΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, 2005

Επιβλέπων Καθηγητής: Δρ. Πελεκάσης Νικόλαος, Επίκουρος Καθηγητής Υπολογιστικής  
Ρευστομηχανικής

### **Περίληψη**

Οι μικροφυσαλίδες τύπου Contrast Agent έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται από τα τέλη του προηγούμενου αιώνα τόσο στη διαγνωστική ιατρική, π.χ. αγγειογραφία και διάγνωση διάφορων μορφών καρκίνου των εσωτερικών οργάνων μεταξύ άλλων, όσο και στην θεραπεία διαφόρων ασθενειών, π.χ. θεραπεία καρκίνου και γονιδιακή θεραπεία με πολύ αξιόλογα αποτελέσματα. Αν και η ανάπτυξη των κλινικών μεθόδων αυτών έχει βασιστεί σε πειράματα τόσο μέσα σε ζωντανούς οργανισμούς (in vivo) όσο και εκτός αυτών (in vitro), υπάρχουν ακόμα αναπάντητα ερωτήματα που αφορούν στη δυναμική συμπεριφορά των σωματιδίων αυτών. Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία γίνεται προσπάθεια προσομοίωσης της δυναμικής συμπεριφοράς ενός τέτοιου σωματιδίου, θεωρώντας αρχικά μόνο σφαιροσυμμετρικές ταλαντώσεις, όταν υπόκειται σε διαταραχή της εξωτερικής πίεσης. Στη συνέχεια γίνεται προσομοίωση της αξονοσυμμετρικής ταλαντώσης και κατάρρευσης μιας μικροφυσαλίδας σε παρόμοιο ακουστικό περιβάλλον. Τέλος, τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκρίνονται με αντίστοιχα πειράματα, απ' όπου φαίνεται πολύ καλή συμφωνία μοντέλου – πειράματος. Από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι η ελαστικότητα της μεμβράνης παίζει καθοριστικό ρόλο τόσο στην απόκριση της μικροφυσαλίδας όσο και στον τρόπο κατάρρευσής της.

# Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Οι μικροφουσαλίδες τύπου Contrast Agent συνιστούν σωματίδια στο εσωτερικό των οποίων υπάρχει αέριο, συνήθως διαλυτό στο αίμα, και τα οποία περιβάλλονται από μεμβράνη η οποία παρουσιάζει ελαστικές ιδιότητες. Το γεγονός ότι η διάμετρός τους κυμαίνεται από 1 ως 10  $\mu\text{m}$  σε συνδυασμό με τον μικρό αριθμό από αυτές που συνήθως διέρχονται μέσω των αγγείων κατά την διάρκεια των κλινικών μετρήσεων, ελαχιστοποιεί το ενδεχόμενο καρδιακής εμβολής και τις καθιστά ασφαλείς για χρήση στο ανθρώπινο κυκλοφορικό σύστημα. Η χρήση μεμβράνης είναι απαραίτητη, ώστε να μην διαχέεται το αέριο πολύ γρήγορα στο αίμα και τα σωματίδια να μεταφέρονται με την κυκλοφορία χωρίς αλλοιώσεις στο επιθυμητό σημείο μελέτης – δράσης [1].

## 1.1 Κίνητρο και Υπόβαθρο

Τα σωματίδια αυτά έχουν ευρεία χρήση στην διαγνωστική ιατρική, κυρίως μέσω της μεθόδου των υπερήχων. Αν διαταραχθεί το πεδίο της πίεσης με ένα συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα, τότε η μικροφουσαλίδα αρχίζει να ταλαντώνεται και να εκπέμπει ένα ισχυρό σήμα πίεσης λόγω σκέδασης, το οποίο μπορεί να αναλυθεί προκειμένου να εξαχθεί το φάσμα συχνοτήτων ταλάντωσης [2]. Το φάσμα αυτό θα περιέχει μόνο την επιβαλλόμενη συχνότητα διαταραχής, αν η διαταραχή είναι μικρή (γραμμική), ενώ θα περιέχει και άλλες (υποαρμονικές ή υπεαρμονικές) αν η διαταραχή είναι αρκετά μεγάλη. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να ταυτοποιηθεί το συγκεκριμένο σωματίδιο.

Σημαντικό πρόβλημα ωστόσο συνιστά το γεγονός ότι τη διαταραχή της πίεσης δεν την αντιλαμβάνονται μόνο οι μικροφουσαλίδες, αλλά και τα ανθρώπινα όργανα τα οποία με τη σειρά τους έχουν το δικό τους φάσμα συχνοτήτων λόγω σκέδασης. Το τελευταίο κυρίως περιέχει την επιβαλλόμενη συχνότητα της διαταραχής. Επομένως, για να ταυτοποιηθεί η τοποθεσία των φουσαλίδων και του ανθρώπινου ιστού, είναι απαραίτητο να είναι γνωστό σημαντικό τμήμα του φάσματος συχνοτήτων των μικροφουσαλίδων.

Επίσης, επειδή απαιτείται το κύμα πίεσης που στέλνει πίσω η μικροφουσαλίδα να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο για να γίνεται ευκολότερη η ταυτοποίησή της, γεγονός που

συμβαίνει στην κατάσταση συντονισμού, είναι απαραίτητο να είναι γνωστή η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσής της.

Ακόμα, υπάρχουν εφαρμογές στην ιατρική [3], όπου το ροϊκό πεδίο που δημιουργείται από τις ταλαντώσεις μίας φυσαλίδας σε περιβάλλον υπερήχων χρησιμοποιείται για την δημιουργία πόρων στην επιφάνεια γειτονικών κυττάρων (sonoporation). Αυτό το ροϊκό πεδίο αυξάνει την απορροφητικότητα των κύτταρων σε φάρμακα, πρωτεΐνες ή συγκεκριμένα γονίδια, με αποτέλεσμα να είναι πιο αποδοτική η θεραπεία. Επειδή η απορροφητικότητα των κυττάρων εξαρτάται από το δημιουργούμενο ροϊκό πεδίο, και επομένως από τη συχνότητα ταλάντωσης της φυσαλίδας, στις παραπάνω εφαρμογές είναι επιθυμητό η μικροφυσαλίδα να μην καταρρέει. Επομένως το ζητούμενο είναι να βρεθεί για τα συγκεκριμένα φυσικά χαρακτηριστικά της μικροφυσαλίδας, δηλαδή ακτίνα, πάχος μεμβράνης και μέτρο ελαστικότητας υλικού μεταξύ άλλων, το παράθυρο ασφαλείας σχετικά με το πλάτος και την συχνότητα διαταραχής της πίεσης.

Επίσης, διεξάγεται ερευνα στην οποία τα contrast agents εμπεριέχουν φάρμακα τα οποία μεταφέρουν στις προβληματικές περιοχές του σώματος [4]. Κατά τη μέθοδο αυτή, εξαιτίας των ιδιοτήτων της μεμβράνης, οι μικροφυσαλίδες επιλεκτικά προσκολλούνται στα άρρωστα κύτταρα. Έπειτα με εφαρμογή μίας μεγάλης διαταραχής της πίεσης οι μικροφυσαλίδες σπάνε και το φάρμακο μεταφέρεται στα κύτταρα αυτά. Το ζητούμενο είναι να σχεδιαστούν μικροφυσαλίδες με τέτοια χαρακτηριστικά, δηλαδή ακτίνα, μέτρο ελαστικότητας και πάχος μεμβράνης, ώστε η δεδομένη διαταραχή της πίεσης και της συχνότητας να τα καταστρέφει χωρίς να επηρεάζει τους γύρω ιστούς. Και αυτό γιατί υπάρχουν περιορισμοί στη μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της πίεσης στους οργανισμούς ( $P_{max} < 1.6 \text{ MPa}$ ). Τέλος, η αλληλεπίδραση των μικροφυσαλίδων με υπερήχους χρησιμοποιείται και για τη μέτρηση της ροής στην καρδιά και αποτελεί εργαλείο για την πρόβλεψη καρδιακού επεισοδίου.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι είναι πολύ σημαντικό για τη βελτιστοποίηση των παραπάνω μεθόδων να μελετηθεί αρχικά η δυναμική μιας μικροφυσαλίδας τόσο όσον αφορά το φάσμα συχνοτήτων που παράγει, όσο και αναφορικά με τη συσχέτιση του φάσματος με τις ιδιότητες της μεμβράνης, π.χ. ιζώδες, μέτρο ελαστικότητας και πάχος, για δεδομένο μέγεθος της μικροφυσαλίδας. Επίσης, ο τρόπος κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας θα καθορίσει τα όρια της διαταραχής της πίεσης και της συχνότητας ώστε να μην σπάσει η μεμβράνη, και θα

συσχετίζει τις ιδιότητες της μεμβράνης με τα όρια αυτά. Πρέπει τέλος να επισημανθεί ότι μπορεί οι μικροφυσαλίδες να εμφανίζονται σε πληθυσμούς, ωστόσο το μέγεθος τους και το πάχος μεμβράνης ακολουθεί συγκεκριμένη κατανομή με ορισμένη διασπορά και επομένως είναι δυνατός ο έλεγχος του εύρους των τιμών κατά την παρασκευή τους.

## 1.2 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Αρκετή έρευνα έχει επικεντρωθεί στη μελέτη των μικροφυσαλίδων τα τελευταία χρόνια, κυρίως όταν αυτές υπόκεινται σε γραμμικές διαταραχές. Το πλέον γνωστό μοντέλο μικροφυσαλίδων είναι αυτό των De Jong et al.[5], το οποίο βασίζεται στην τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Rayleigh, Plesset, Noltingk, Neppipas and Poritsky (RPNNP). Στο παραπάνω μοντέλο το πάχος της μεμβράνης θεωρείται αμελητέο ενώ χρησιμοποιείται η καταστατική εξίσωση Kelvin-Voigt για τη συσχέτιση των τάσεων με τις παραμορφώσεις στην μεμβράνη. Επίσης οι όροι που σχετίζονται με την ιξώδη και ακουστική σκέδαση της συνολικής ενέργειας μοντελοποιούνται με βάση τα αποτελέσματα της γραμμικής ανάλυσης για ταλαντώσεις ελεύθερης φυσαλίδας [6]. Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι,

$$\rho R \ddot{R} + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = P_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v - P_{st} - \frac{2\sigma}{R} - 2S_p \left( \frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right) - \delta_t \omega \rho R \dot{R} - P_{Ac}(t), \quad (1)$$

όπου  $R$  η ακτίνα της μικροφυσαλίδας την τυχαία χρονική στιγμή  $t$ ,  $\rho$  η πυκνότητα του εξωτερικού ρευστού,  $R_0$ , η ακτίνα της φυσαλίδας στην κατάσταση ισορροπίας,  $P_{g0}$ , η πίεση του αερίου μέσα στη μικροφυσαλίδα στην κατάσταση ισορροπίας,  $\gamma$  η πολυτροπική σταθερά του αερίου,  $P_v$ , η τάση ατμών,  $P_{st}$ , η στατική πίεση του περιβάλλοντος ρευστού, και  $\sigma$  ο συντελεστής επιφανειακής τάσης. Επίσης

$$\delta_t = \delta_{rad} + \delta_{vis} + \delta_{th} + \delta_f \quad (2)$$

είναι ο συνολικός συντελεστής απόσβεσης που οφείλεται στη συμπίεστικότητα του εξωτερικού ρευστού  $\delta_{rad}$ , στο ιξώδες του εξωτερικού ρευστού  $\delta_{vis}$ , στη διάχυση θερμότητας  $\delta_{th}$  και στο

ιξώδες της μεμβράνης  $\delta_f = \frac{S_f}{m\omega}$ :  $S_f$  είναι παράμετρος που χαρακτηρίζει το ιξώδες της

μεμβράνης,  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης,  $m = 4\pi R^3 \rho$  η μάζα του

συστήματος φυσαλίδας-ρευστού,  $P_{Ac}$  η διαταραχή της πίεσης του περιβάλλοντος ρευστού και  $S_p$  η παράμετρος που αφορά την ελαστικότητα της μεμβράνης. Στην πραγματικότητα το μοντέλο αυτό έχει προκύψει από αυτό του Church [7], αν θεωρηθεί το πάχος της μεμβράνης αμελητέο.

Πρόσφατα οι Khismatullin & Nadim [8] έλαβαν υπόψη τους το ιξώδες και τη συμπιεστότητα του ρευστού καθώς και την ελαστικότητα και το ιξώδες της μεμβράνης. Θεώρησαν ότι η τελευταία έχει πεπερασμένο πάχος και υπολόγισαν τις συχνότητες συντονισμού και τους συντελεστές απόσβεσης, για γραμμικές όμως διαταραχές. Εξαιτίας της ελαστικότητας της μεμβράνης ο συντονισμός επέρχεται σε υψηλότερες συχνότητες διαταραχών απ' ότι στις ελεύθερες φυσαλίδες, για δεδομένο μέγεθος. Η επίδραση ωστόσο της μη γραμμικότητας της διαταραχής στη συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο φάσμα συχνοτήτων έχει διερευνηθεί αριθμητικά μόνο με το μοντέλο των De Jong et al., στο οποίο φαίνεται ότι οι υψηλότερες αρμονικές είναι αρκετά αδύναμες στις μικροφυσαλίδες σε αντίθεση με τις ελεύθερες φυσαλίδες.

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία διερευνάται η επίδραση της μη γραμμικής διαταραχής, των ιδιοτήτων της μεμβράνης (ελαστικότητα και ιξώδες) και του εξωτερικού ρευστού (συμπιεστότητα και ιξώδες), στο φάσμα συχνοτήτων της μικροφυσαλίδας για σφαιροσυμμετρικές ταλαντώσεις. Επίσης, μελετάται σε δεύτερη φάση η επίδραση των παραμενουσών τάσεων της μεμβράνης στην απόκριση της μικροφυσαλίδας, ενώ συγκρίνεται η απόκριση της μικροφυσαλίδας με αυτή της ελεύθερης φυσαλίδας. Τα παραπάνω αναφέρονται σε γραμμικό καταστατικό νόμο τάσεων – παραμορφώσεων.

Ο τρόπος κατάρρευσης μιας μικροφυσαλίδας είναι ένα αντικείμενο το οποίο δεν έχει διερευνηθεί εκτεταμένα. Οι μέχρι τώρα μελέτες αφορούν μόνο πειραματικά αποτελέσματα με λήψη φωτογραφιών από τους Chomas et al. [9]. Σε αυτά τα πειράματα βρέθηκε ότι όταν μικροφυσαλίδα με μεμβράνη από λιπίδιο καταρρέει, δημιουργούνται πολλές μικρότερες ελεύθερες φυσαλίδες που προφανώς αλλάζουν το φάσμα συχνοτήτων. Η κατάρρευσή της εμφανίστηκε αμέσως μετά την στιγμή κατά την οποία ο όγκος της φυσαλίδας γίνεται ελάχιστος και αποδόθηκε από τους παραπάνω ερευνητές σε αστάθεια τύπου Rayleigh – Taylor. Η αστάθεια αυτή στην πιο τυπική της μορφή εμφανίζεται σε ελεύθερες φυσαλίδες για μεγάλες τιμές της επιτάχυνσης της διεπιφάνειας [10,11,12], με αυξανόμενη πιθανότητα εμφάνισης όσο αυξάνεται το πλάτος της ακουστικής διαταραχής. Όμως, όταν ληφθεί υπόψη η

θερμική απόσβεση της ενέργειας της φυσαλίδας αστάθειες τέτοιου τύπου φαίνονται να απονούν [13]. Αντίθετα πολύ συχνά, ακόμα και για μικρά πλάτη ακουστικών διαταραχών, εμφανίζεται ένα άλλο είδος αστάθειας, η επονομαζόμενη και παραμετρική, η οποία αναπτύσσεται μετά από πολλούς κύκλους σφαιροσυμμετρικών ταλαντώσεων και σταδιακά μεταφέρει ενέργεια σε υψηλές αρμονικές. Η αστάθεια αυτή μελετάται με την βοήθεια ανάλυσης Floquet πάνω στην βασική περιοδική λύση [14] και παρέχει ένα διάγραμμα φάσης σχετικά με τα όρια ευστάθειας των αρμονικών ιδιομορφών σχήματος, ανάλογα με την αρχική ακτίνα της φυσαλίδας και το πλάτος της αρχικής διαταραχής. Για μεγάλες διαταραχές το διάγραμμα αυτό προκύπτει αριθμητικά [13,14], είναι αρκετά περίπλοκο και κυριαρχείται από την δεύτερη ιδιομορφή Legendre,  $P_2(\theta)$ . Για ασθενείς διαταραχές τα κριτήρια ευστάθειας παρέχονται από την εξίσωση Mathieu [15] και προβλέπουν ότι οι σφαιροσυμμετρικές ταλαντώσεις θα γίνουν ασταθείς ως προς ιδιομορφές σχήματος όταν ο λόγος της συχνότητας ταλαντώσεων όγκου,  $\Omega$ , προς την ιδιοσυχνότητα των ταλαντώσεων σχήματος

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_n'^2}{\sigma/(R_0^3\rho)} = (n+1)(n-1)(n+2) \quad (3)$$

πάρει τιμές κοντά στο 2, 1,  $\frac{1}{2}$  ή και ακόμη μικρότερες τιμές [16]:  $R_0$  η ακτίνα της φυσαλίδας στην ισορροπία,  $\sigma$  η διεπιφανειακή τάση και  $\rho$  η πυκνότητα του υγρού. Στο όριο δε ασθενών ιξωδών δυνάμεων και ασθενών διαταραχών έχει βρεθεί μετά από ανάλυση πολλαπλών χρονικών κλιμάκων [17], ότι όταν το πλάτος ταλάντωσης  $f$  της φυσαλίδας ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα σε αδιάστατη μορφή:

$$f > \frac{2}{(4n-1)\omega_n} \left[ 2(2n+1)(n+2) \left( \frac{1}{\text{Re}} \right)^2 + (\Omega - 2\omega_n)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

όπου  $\text{Re} = \left( \frac{R_0 \sigma \rho}{\mu^2} \right)^{1/2}$ ,  $\omega_n$  δίνεται από την (3) και  $\Omega \sqrt{\frac{\sigma}{R_0^3 \rho}}$  η κυκλική συχνότητα των

ταλάντωσης όγκου, τότε εμφανίζεται η παραμετρική αστάθεια κατά την οποία ενώ αρχικά το σχήμα της φυσαλίδας είναι σφαιρικό μετά από ορισμένες ταλαντώσεις αρχίζουν να εμφανίζονται και άλλες ιδιομορφές. Η παραμετρική αστάθεια οφείλεται στη μεταφορά ενέργειας από την ιδιομορφή που εκτελεί ταλαντώσεις όγκου σε υψηλότερες ιδιομορφές. Τέλος, όταν το αδιάστατο πλάτος ταλάντωσης της φυσαλίδας δεν ικανοποιεί την παραπάνω

ανισότητα, τότε η αρχικά σφαιρική φυσαλίδα παραμένει σφαιρική ανεξάρτητα από το χρόνο ταλάντωσης της.

Ο τρόπος θραύσης μικροφυσαλίδας μπορεί να μην έχει μελετηθεί θεωρητικά και αριθμητικά, ωστόσο υπάρχουν πολλές μελέτες που αφορούν την παραμόρφωση και κατάρρευση σωματιδίων (ερυθρά αιμοσφαίρια, κάψουλες) σε μορφή σταγόνας που επίσης περιβάλλεται από ελαστική μεμβράνη, όταν αυτά αλληλεπιδρούν με έρπουσα ή εκτατική ροή [18,19]. Ομοίως, η παραμόρφωση και κατάρρευση ελεύθερων φυσαλίδων σε περιβάλλον ακουστικών διαταραχών έχει αποτελέσει αντικείμενο εκτεταμένης μελέτης [20,21]. Επομένως, η ανάλυση των μικροφυσαλίδων πρέπει να βασιστεί στο συνδυασμό στοιχείων από τις παραπάνω δυο κατηγορίες θεμάτων. Πιο συγκεκριμένα, για τη μοντελοποίηση της μεμβράνης της μικροφυσαλίδας θα χρησιμοποιηθούν στοιχεία, π.χ. καταστατικός νόμος μεμβράνης, εξισώσεις ισορροπίας μεμβράνης, από τη μοντελοποίηση της μεμβράνης του ερυθρού αιμοσφαιρίου ή της κάψουλας. Παράλληλα, το ακουστικό περιβάλλον το οποίο επιβάλλεται στις μικροφυσαλίδες καθώς και η συμπιεστότητα των τελευταίων, καθιστούν αναγκαία την αριθμητική προσέγγιση που ακολουθείται στις ελεύθερες φυσαλίδες.

Στα πλαίσια αυτά, στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία γίνεται προσπάθεια μοντελοποίησης της μικροφυσαλίδας επιτρέποντας αξονοσυμμετρικές ταλαντώσεις και θεωρώντας ότι το πάχος της μεμβράνης είναι αμελητέο, ενώ δεν λαμβάνονται υπόψη ιξώδεις όροι για το ρευστό και αντίσταση σε κάμψη. Κύριος στόχος είναι να διερευνηθεί ο τρόπος παραμόρφωσης και κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας, γεγονός που θα καθορίσει τον αριθμό και το μέγεθος των ελεύθερων μικροφυσαλίδων που θα δημιουργηθούν. Παράλληλα ενδιαφέρον είναι να ταυτοποιηθεί η εμφάνιση του φαινομένου του λυγισμού κελύφων και πλακών [22] για contrast agents, μια και τα τελευταία εκτελούν ταλαντώσεις όγκου με αποτέλεσμα να υφίστανται και θλιπτικές τάσεις. Επιπλέον πρέπει να διευκρινισθούν τα όρια εμφάνισης ή και συνύπαρξης του λυγισμού και των άλλων μηχανισμών θραύσης που είναι γνωστοί για ελεύθερες φυσαλίδες, παραμετρική και Rayleigh-Taylor, όπου υπάρχει ιστροπικός συντελεστής ελαστικότητας, δηλαδή επιφανειακή τάση.



### 1.3 Οργάνωση Μεταπτυχιακής Εργασίας

Το υπόλοιπο αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας χωρίζεται σε τρεις ενότητες που καταλαμβάνουν τα Κεφάλαιο 2 ως 4, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 2 αναλύεται το πρόβλημα που αφορά τις σφαιροσυμμετρικές ταλαντώσεις της μικροφυσαλίδας. Παρουσιάζονται οι ορισμοί, οι παραδοχές και οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα και εφαρμόζεται γραμμική ανάλυση ευσταθείας στη μη γραμμική εξίσωση για να λάβουμε το φάσμα συχνοτήτων, όταν επιβάλλονται γραμμικές διαταραχές. Στην συνέχεια αναφέρεται η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης και για την παραγωγή του φάσματος συχνοτήτων. Τέλος, παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα και συγκρίσεις με τη γραμμική θεωρία και τα πειράματα, ενώ εξάγονται συμπεράσματα όσον αφορά την επίδραση των ιδιοτήτων της μεμβράνης στη δυναμική της σφαιροσυμμετρικής ταλάντωσης της μικροφυσαλίδας.

Στο Κεφάλαιο 3 αναλύεται το πρόβλημα της αξονοσυμμετρικής ταλάντωσης και κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας σε περιβάλλον υπερήχων και αναπτύσσεται η αριθμητική μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων, η οποία βασίζεται στην υβριδική μέθοδο πεπερασμένων – συνοριακών στοιχείων για την διακριτοποίηση της διεπιφάνειας και η οποία χρησιμοποιείται και για την προσομοίωση της ελεύθερης φυσαλίδας. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης της κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας με μεμβράνη από λιπίδιο στις συνθήκες του πειράματος του James E. Chomas et al [9]. Αν και το μοντέλο δεν λαμβάνει υπόψη την αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη, ο τρόπος κατάρρευσης συμπίπτει σε μεγάλο βαθμό με αυτό του πειράματος. Τα τελικά συμπεράσματα της μεταπτυχιακής εργασίας και κατευθύνσεις για περαιτέρω έρευνα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4.

## Κεφάλαιο 2 Σφαιροσυμμετρικές Ταλαντώσεις Μικροφυσαλίδας

Στο παρόν κεφάλαιο αναλύεται το πρόβλημα των σφαιροσυμμετρικών ταλαντώσεων μικροφυσαλίδας, όταν αυτή υπόκειται σε διαταραχές της πίεσης στο άπειρο. Η δυναμική συμπεριφορά της εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά του ρευστού που την περιβάλλει όσο και από τις ιδιότητες της μεμβράνης και από το μέγεθος της.

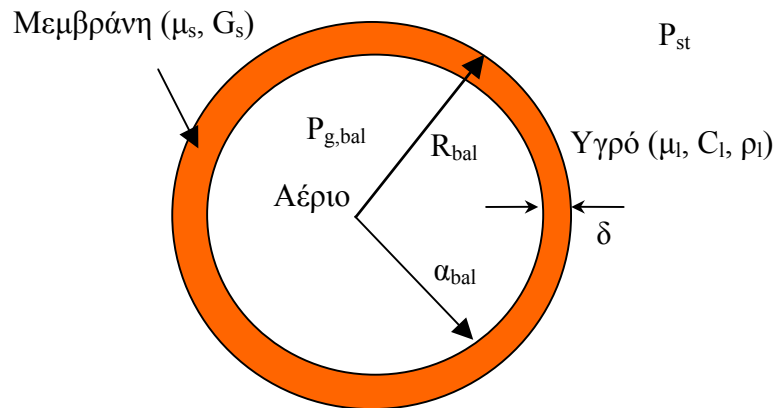
Το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου οργανώνεται ως εξής. Στο Υποκεφάλαιο 2.1 ορίζονται το πρόβλημα και τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται στις πειραματικές μετρήσεις και αναφέρονται οι παραδοχές και οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα. Στη συνέχεια παράγεται η μη γραμμική εξίσωση του προβλήματος και εφαρμόζεται αδιαστατοποίηση. Στο Υποκεφάλαιο 2.2 εφαρμόζεται γραμμικοποίηση και λύνεται αναλυτικά η γραμμική δευτεροβάθμια εξίσωση που προκύπτει. Στο Υποκεφάλαιο 2.3 αναφέρονται οι αριθμητικοί μέθοδοι επίλυσης της μη γραμμικής εξίσωσης και υπολογισμού του φάσματος συχνοτήτων. Τέλος, στο υποκεφάλαιο 2.4 παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα και συγκρίσεις με την γραμμική θεωρία και τα πειράματα, ενώ εξάγονται συμπεράσματα όσον αφορά την επίδραση των ιδιοτήτων της μεμβράνης στη δυναμική της σφαιροσυμμετρικής ταλάντωσης της μικροφυσαλίδας.

## 2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Θεωρούμε αρχικά ότι η μικροφουσαλίδα (Contrast Agent) εξωτερικής ακτίνας  $R = R_{bal}$  και εσωτερικής  $\alpha = \alpha_{bal}$  βρίσκεται σε ισορροπία μέσα σε νευτωνικό ρευστό πυκνότητας  $\rho_l$ , δυναμικού ιξώδους  $\mu_l$  και στατικής πίεσης  $P_{st}$  (Σχήμα 1). Όσον αφορά τη μεμβράνη, θεωρείται ότι το ελαστοιξώδες υλικό της μεμβράνης είναι ασυμπίεστο με μέτρο διάτμησης  $G_s$  και έχει συμπεριφορά νευτωνικού ρευστού με δυναμικό ιξώδες  $\mu_s$ . Έστω ότι  $R_{uns}$ ,  $\alpha_{uns}$  είναι η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα της μικροφουσαλίδας αντίστοιχα, όταν δεν υπάρχουν παραμένουσες τάσεις στην μεμβράνη. Θα θεωρήσουμε ότι στην κατάσταση ισορροπίας υπάρχουν παραμένουσες τάσεις και ότι  $u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}$ ,  $u_r(t=0)|_{r=\alpha_{bal}}$  είναι οι αντίστοιχες μετατοπίσεις που προκαλούν τις τάσεις αυτές. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned} R_{bal} &= R_{uns} + u_r(t=0)|_{r=R_{bal}} \\ \alpha_{bal} &= \alpha_{uns} + u_r(t=0)|_{r=\alpha_{bal}} \end{aligned} \quad (5)$$

Στο εσωτερικό της μικροφουσαλίδας υπάρχει ιδανικό αέριο σε πίεση ισορροπίας  $P_{g,bal}$ , οι μεταβολές της οποίας θεωρούνται ότι γίνονται ομοιόμορφα και ακαριαία σε όλο το αέριο.



**Σχήμα 1.** Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της μικροφουσαλίδας (Contrast Agent) στην κατάσταση ισορροπίας.

Αν διαταράξουμε την χρονική στιγμή  $t = 0$  την πίεση στο άπειρο ως:

$$P_{\infty}(t) = P_{st} [1 + \varepsilon \sin(\omega_f t)], \quad \omega_f = 2\pi f \quad (6)$$

όπου  $f = 1-10 \text{ MHz}$  η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής, τότε η μικροφυσαλίδα θα αρχίσει να ταλαντώνεται και θα στέλνει πίσω κύματα πίεσης τα οποία θα περιέχουν εν γένει διάφορες συχνότητες. Η ένταση (Scattering Cross Section –  $\sigma_{Sc}$ ) αυτή του επιστρεφόμενου κύματος από τη μικροφυσαλίδα μπορεί να ποσοτικοποιηθεί [23] ως:

$$\sigma_{Sc} = 4\pi R_{bal}^2 \frac{\int_0^{t_f} P_{Sc}^2 dt}{\int_0^{t_f} P_{Ac}^2 dt}, \quad (7)$$

όπου  $P_{Ac}(t) = \varepsilon P_{st} \sin(\omega_f t)$  είναι η διαταραχή της πίεσης στο άπειρο, και  $P_{Sc}(r, t) = P_l(r, t) - P_{st} - P_{Ac}(t)$  είναι η σκεδαζόμενη πίεση σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της μικροφυσαλίδας. Η ένταση ( $\sigma_{Sc}$ ) αυτή καθορίζει ουσιαστικά το πόσο δυνατό είναι το σήμα που δίνει πίσω η μικροφυσαλίδα.

Ωστόσο, επειδή το σήμα που εκπέμπει η μικροφυσαλίδα περιέχει εν γένει πολλές συχνότητες μπορεί να οριστεί [5] το μέγεθος:

$$\sigma_{Sc,n} = 4\pi R_{bal}^2 \frac{\int_0^{t_f} P_{Sc,n}^2 dt}{\int_0^{t_f} P_{Ac}^2 dt}, \quad (8)$$

όπου  $P_{Sc,n}$  είναι το καθαρό ποσό της πίεσης σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της μικροφυσαλίδας που στέλνει πίσω μόνο η  $n$ -ιοστή αρμονική. Το μέγεθος αυτό ουσιαστικά δείχνει ξεχωριστά τη δύναμη της κάθε αρμονικής στο συνολικό σήμα.

Το ρευστό θεωρείται ότι έχει συμπιεστότητα μακρυνά από τη φυσαλίδα και επομένως η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής είναι πεπερασμένη, έστω  $C_l$ . Κοντά όμως στη φυσαλίδα η ροή θεωρείται ασυμπίεστη. Για να ισχύει αυτή η υπόθεση θα πρέπει το μήκος κύματος της διαταραχής να είναι αρκετά μεγαλύτερο από την ακτίνα της φυσαλίδας. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις ισχύει η μη γραμμική διαφορική εξίσωση για σφαιρική ταλάντωση φυσαλίδας μέσα σε συμπιεστό ρευστό σύμφωνα με τους Keller – Miksis [24]:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{C_l}\right) R \ddot{R} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}}{2C_l}\right) \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_l} \left(1 + \frac{\dot{R}}{C_l}\right) (P_l|_R - P_{st} - P_{Ac}) + \frac{R}{\rho_l C_l} \frac{d}{dt} (P_l|_{r=R} - P_{Ac}), \quad (9)$$

όπου,  $R$  είναι η ακτίνα της φυσαλίδας την τυχούσα χρονική στιγμή  $t$ ,  $\dot{R} = \frac{dR(t)}{dt}$ ,  $\ddot{R} = \frac{d^2 R(t)}{dt^2}$

και  $P_l|_{r=R}$  είναι η πίεση του εξωτερικού ρευστού υπολογισμένη στην διεπιφάνεια της φυσαλίδας.

Η προσπάθεια μοντελοποίησης της μικροφυσαλίδας θα ολοκληρωθεί με την συσχέτιση της  $P_l|_{r=R}$  με την εσωτερική πίεση του αερίου  $P_g$  και τα χαρακτηριστικά της μεμβράνης. Προς τούτο θα θεωρήσουμε ότι η μεμβράνη υφίσταται μόνο ακτινικές μετατοπίσεις και ότι έχει συμπεριφορά ιξωδοελαστικού ρευστού που περιγράφεται από το μοντέλο Kelvin-Voigt όπου ισχύει ο γραμμικός καταστατικός νόμος τάσεων-παραμορφώσεων [8]:

$$\underline{\underline{X_m}} = 2(G_s \underline{\underline{\gamma}} + \mu_s \underline{\underline{\dot{\gamma}}}), \quad (10)$$

όπου

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2} [\underline{\nabla u} + (\underline{\nabla u})^T], \quad \underline{\underline{\dot{\gamma}}} = \frac{1}{2} [\underline{\nabla U} + (\underline{\nabla U})^T], \quad (11)$$

$\underline{u}$  το διάνυσμα των μετατοπίσεων,  $\underline{U}$  το διάνυσμα των ταχυτήτων μέσα στην μεμβράνη,  $\mu_s$  το δυναμικό ιξώδες και  $G_s$  το μέτρο ελαστικότητας του υλικού από το οποίο αποτελείται η μεμβράνη. Υποθέτουμε ότι το πάχος της μεμβράνης  $\delta = R_{bal} - a_{bal}$  είναι μικρό σχετικά με την ακτίνα της φυσαλίδας και η πυκνότητά της μικρή και επομένως οι αδρανειακοί όροι της μεμβράνης θα είναι αμελητέοι σε σχέση με τους ιξώδεις όρους. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη θεώρηση, η  $r$ -διεύθυνση της ορμής για τη μεμβράνη γραμμένη σε σφαιρικές συντεταγμένες θα είναι:

$$-\frac{\partial P_s}{\partial r} + 2\mu_s \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + 2G_s \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{4\mu_s}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{4G_s}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{4\mu_s}{r^2} U_r - \frac{4G_s}{r^2} u_r = 0, \quad a \leq r \leq R, \quad t \geq 0 \quad (12)$$

όπου  $P_s(r, t)$  η πίεση μέσα στη μεμβράνη.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον καταστατικό νόμο του Mooney για μεμβράνη απειροελάχιστου πάχους, η σχέση (10) τάσεων παραμορφώσεων θα μετατραπεί [25,26], θεωρώντας μόνο ακτινικές παραμορφώσεις - μετατοπίσεις:

$$X_{rr} = 2G_s \frac{\delta}{R} \left[ 1 - \frac{1}{e^6} \right] \left[ 1 + b(e^2 - 1) \right] + 4\mu_s \frac{1}{eR} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (13)$$

όπου  $e = 1 + \frac{u_r}{R_{uns}}$ ,  $E = 3G_s$  και  $0 \leq b \leq 1$ , ανάλογα με το υλικό. Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα χρησιμοποιηθεί ο γραμμικός καταστατικός νόμος.

Ολοκληρώνοντας την (12) μέσα στη μεμβράνη λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} P_s \Big|_{r=a} - P_s \Big|_{r=R} + 2\mu_s \frac{\partial U_r}{\partial r} \Big|_{r=R} - 2\mu_s \frac{\partial U_r}{\partial r} \Big|_{r=a} + 2G_s \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=R} - 2G_s \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=a} + \\ \int_a^R \left( \frac{4\mu_s}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{4G_s}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{4\mu_s}{r^2} U_r - \frac{4G_s}{r^2} u_r \right) dr = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Το ισοζύγιο ορθών τάσεων στη διεπιφάνεια αερίου – μεμβράνης δίνει:

$$P_s \Big|_{r=a} = P_g - \frac{2\sigma_1}{a} + 2\mu_s \frac{\partial U_r}{\partial r} \Big|_{r=a} + 2G_s \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (15)$$

Ενώ το ισοζύγιο ορθών τάσεων στη διεπιφάνεια εξωτερικού ρευστού – μεμβράνης δίνει:

$$P_s \Big|_{r=R} = P_l \Big|_{r=R} + \frac{2\sigma_2}{R} + 2\mu_s \frac{\partial U_r}{\partial r} \Big|_{r=R} + 2G_s \frac{\partial u_r}{\partial r} \Big|_{r=R} - X_{rr}^{(l)} \Big|_{r=R} \quad (16)$$

Η (14) από τις (15) και (16) δίνει:

$$P_g = P_l \Big|_{r=R} + \frac{2\sigma_1}{a} + \frac{2\sigma_2}{R} - X_{rr}^{(l)} \Big|_{r=R} - \int_a^R \left( \frac{4\mu_s}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{4G_s}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{4\mu_s}{r^2} U_r - \frac{4G_s}{r^2} u_r \right) dr, \quad (17)$$

όπου

$$X_{rr}^{(l)} \Big|_{r=R} = \frac{4\mu_l}{3} \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \Big|_{r=R} - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R}}{R} \right] \quad (18)$$

είναι η συνιστώσα του τανυστή των ιξωδών τάσεων του εξωτερικού υγρού υπολογισμένη πάνω στην μεμβράνη ( $r=R$ ) και  $\Phi(r,t)$  το δυναμικό ταχύτητας του υγρού. Από τη θεωρία της ιδανικής ροής γύρω από σφαίρα ακτίνας  $R(t)$ , προκύπτει ότι:

$$\Phi(r,t) = -\frac{\dot{R}R^2}{r} \quad (19)$$

Επειδή η μεμβράνη θεωρείται ασυμπίεστη, η εξίσωση της συνέχειας για την μεμβράνη γράφεται:

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + 2\frac{U_r}{r} = 0, \quad a \leq r \leq R \quad (20)$$

η οποία σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} U_r|_{r=a} &= \dot{a} = \frac{da}{dt} \\ U_r|_{r=R} &= \dot{R} = \frac{dR}{dt} \end{aligned} \quad (21)$$

δίνει

$$U_r = \dot{a} \left( \frac{a}{r} \right)^2 = \dot{R} \left( \frac{R}{r} \right)^2, \quad a \leq r \leq R \quad (22)$$

Σχετικά με τις μετατοπίσεις της εσωτερικής και της εξωτερικής ακτίνας της μεμβράνης ισχύει ότι,

$$\begin{aligned} u_r|_{r=R} &= R(t) - R_{uns} = R(t) - R_{bal} + u_r(t=0)|_{r=R_{bal}} \\ u_r|_{r=a} &= a(t) - a_{uns} = a(t) - a_{bal} + u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} \end{aligned} \quad (23)$$

για την τυχούσα χρονική στιγμή  $t$ , ενώ από τη διατήρηση του όγκου της μεμβράνης προκύπτει:

$$a^3(t) = R^3(t) - \left( R_{bal} - u_r(t=0)|_{r=R_{bal}} \right)^3 + \left( a_{bal} - u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} \right)^3 \quad (24)$$

Η σχέση (24) την χρονική στιγμή  $t=0$  δίνει:

$$\left( R_{bal} - u_r(t=0)|_{r=R_{bal}} \right)^3 - \left( a_{bal} - u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} \right)^3 = R_{bal}^3 - a_{bal}^3, \quad (25)$$

η οποία συσχετίζει τις μετατοπίσεις  $u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}$  και  $u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}$  που προκαλούν τις παραμένουσες τάσεις.

Για το αέριο θεωρούμε αδιαβατική συμπίεση – εκτόνωση, άρα θα ισχύει:

$$P_g V^\gamma = P_{g,bal} V_{bal}^\gamma \quad (26)$$

όπου  $P_{g,bal}$ ,  $V_{bal}$  η πίεση και ο όγκος του αερίου σε συνθήκες ισορροπίας. Στην κατάσταση ισορροπίας ισχύει ότι  $U_r(t=0) = 0$ , όποτε η (17) δίνει:

$$P_{g,bal} = P_{st} + \frac{2\sigma_1}{a_{bal}} + \frac{2\sigma_2}{R_{bal}} - 4G_s \left[ \frac{u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}}{R_{bal}} - \frac{u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}}{a_{bal}} \right] \quad (27)$$

Συνδυάζοντας τις (17),(18),(19),(22),(23),(26),(27) λαμβάνουμε:

$$P_l|_{r=R} = \left[ P_{st} + \frac{2\sigma_1}{a_{bal}} + \frac{2\sigma_2}{R_{bal}} - 4G_s \left[ \frac{u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}}{R_{bal}} - \frac{u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}}{a_{bal}} \right] \right] \left[ \frac{a_{bal}}{a} \right]^{3\gamma} - \frac{2\sigma_1}{a} - \frac{2\sigma_2}{R} - \frac{4\mu_l \dot{R}}{R} - 4\mu_s \left( \frac{R^2 \dot{R}}{a^3} - \frac{\dot{R}}{R} \right) - 4G_s \left( \frac{a - a_{bal} + u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}}{a} - \frac{R - R_{bal} + u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}}{R} \right) \quad (28)$$

Αντικαταθιστώντας την (28) στην (9) παίρνουμε τελικά:



$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{\dot{R}}{C_l}\right) R \ddot{R} + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}}{2C_l}\right) \dot{R}^2 + \frac{4\mu_l}{\rho_l C_l} \ddot{R} + \frac{4\mu_s}{\rho_l C_l} \left(\frac{R^3}{a^3} - 1\right) \ddot{R} = \\
& = \frac{1}{\rho_l} \left(1 + \frac{\dot{R}}{C_l}\right) \left[ \begin{aligned} & \left[ P_{st} + \frac{2\sigma_1}{a_{bal}} + \frac{2\sigma_2}{R_{bal}} - 4G_s \left( \frac{u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}}{R_{bal}} - \frac{u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}}{a_{bal}} \right) \right] \left( \frac{a_{bal}}{a} \right)^{3\gamma} + \\ & - \frac{2\sigma_1}{a} - \frac{2\sigma_2}{R} - \frac{4\mu_l \dot{R}}{R} - 4\mu_s \left( \frac{\dot{R} R^2}{a^3} - \frac{\dot{R}}{R} \right) + \\ & - 4G_s \left( \frac{a - a_{bal} + u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}}{a} - \frac{R - R_{bal} + u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}}{R} \right) + \\ & - P_{st} - P_{Ac} \end{aligned} \right] + \\
& + \frac{R}{\rho_l C_l} \left[ \begin{aligned} & - 3\gamma \left[ P_{st} + \frac{2\sigma_1}{a_{bal}} + \frac{2\sigma_2}{R_{bal}} - 4G_s \left( \frac{u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}}{R_{bal}} - \frac{u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}}{a_{bal}} \right) \right] \left( \frac{a_{bal}}{a} \right)^{3\gamma} \frac{\dot{R} R^2}{a^3} + \\ & \frac{2\sigma_1 \dot{R} R^2}{a^4} + \frac{2\sigma_2 \dot{R}}{R^2} + \frac{4\mu_l \dot{R}^2}{R^2} - 4\mu_s \left( \frac{2R \dot{R}^2}{a^3} - \frac{3R^4 \dot{R}^2}{a^6} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) + \\ & - 4G_s \left( \frac{(a_{bal} - u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}) R^2 \dot{R}}{a^4} - \frac{(R_{bal} - u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}) \dot{R}}{R^2} \right) - \frac{dP_{Ac}}{dt} \end{aligned} \right] \quad (29)
\end{aligned}$$

όπου το  $a(t)$  συσχετίζεται με το  $R(t)$  μέσω της (24) και η μετατόπιση  $u_r(t=0)|_{r=R_{bal}}$  με την  $u_r(t=0)|_{r=a_{bal}}$  μέσω της (25). Η (29) αποτελεί μία μη γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς  $R(t)$ , επομένως απαιτούνται δύο αρχικές συνθήκες για την ολοκλήρωση της κατάστρωσης του προβλήματος. Αυτές θα είναι ότι η θέση και η ταχύτητα της μικροφυσαλίδας στην κατάσταση ισορροπίας είναι δεδομένες:

$$\begin{aligned}
R(t=0) &= R_{bal} \\
\dot{R}(t=0) &= 0
\end{aligned} \quad (30)$$

Η επίλυση της (29) θα συσχετίσει την εξωτερική και την εσωτερική ακτίνα της μικροφυσαλίδας με τον χρόνο. Έπειτα, με χρήση της (28) μπορούμε να υπολογίσουμε την πίεση του εξωτερικού ρευστού πάνω στην μεμβράνη σαν συνάρτηση του χρόνου. Αυτή η μεταβλητή θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της  $P_{sc}(R, t)$ , η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του  $\sigma_{sc, n}$ .

Θα εφαρμόσουμε αδιαστατοποίηση στην παραπάνω εξίσωση. Για τον λόγο αυτό κατάλληλα χαρακτηριστικά μεγέθη θα είναι:

Χαρακτηριστικό μήκος:  $R^* = R_{bal}$

Χαρακτηριστικός χρόνος:  $t^* = \frac{1}{\omega_f}$ , επειδή η χρονική κλίμακα στην οποία θα αναπτυχθούν

τα φαινόμενα καθορίζεται από την συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης.

Χαρακτηριστική πίεση:  $P^* = \rho_l \omega_f^2 R_{bal}^2$

Τα αδιάστατα μεγέθη που προκύπτουν είναι:

Αριθμός Reynolds εξωτερικού ρευστού:  $Re_l = \frac{\rho_l U^* R^*}{\mu_l} = \frac{\rho_l \omega_f R_{bal}^2}{\mu_l}$

Αριθμός Reynolds μεμβράνης:  $Re_s = \frac{\rho_l U^* R^*}{\mu_s} = \frac{\rho_l \omega_f R_{bal}^2}{\mu_s}$

Αριθμός Mach λόγω της συμπιεστότητας στο εξωτερικό ρευστό:  $M_l = \frac{U^*}{C_l} = \frac{\omega_f R_{bal}}{C_l}$

Μέτρο διάτμησης της μεμβράνης:  $G'_s = \frac{G_s}{P^*} = \frac{G_s}{\rho_l \omega_f^2 R_{bal}^2}$

Αριθμός Weber αερίου – μεμβράνης:  $We_1 = \frac{R^* P^*}{\sigma_1} = \frac{\rho_l \omega_f^2 R_{bal}^3}{\sigma_1}$

Αριθμός Weber μεμβράνης – εξωτερικού ρευστού:  $We_2 = \frac{R^* P^*}{\sigma_2} = \frac{\rho_l \omega_f^2 R_{bal}^3}{\sigma_2}$

Εφαρμόζοντας την αδιαστατοποίηση στην (29) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{3}{2} - \frac{M_l \dot{R}'}{2}\right) \dot{R}'^2 + \\
& + (1 + M_l \dot{R}') \left[ \left[ \frac{2}{We_1} a_{bal}'^2 + \frac{2}{We_2} + P_{st}' - 4G_s' \left( u_r'(t'=0) \Big|_{r'=1} - \frac{u_r'(t'=0) \Big|_{r=a_{bal}'}}{a_{bal}'} \right) \right] \left( \frac{a_{bal}'}{a'} \right)^{3\gamma} + \right. \\
& \left. - \frac{2}{We_1} \frac{a_{bal}'^3}{a'} - \frac{2}{We_2 R'} - \frac{4}{Re_l} \frac{\dot{R}'}{R'} - \frac{4}{Re_s} \left( \frac{R'^2 \dot{R}'}{a'^3} - \frac{\dot{R}'}{R'} \right) + \right. \\
& \left. - 4G_s' \left( \frac{a' - a_{bal}' + u_r'(t'=0) \Big|_{r=a_{bal}'}}{a'} - \frac{R' - 1 + u_r'(t'=0) \Big|_{r'=1}}{R'} \right) - P_{st}' - \varepsilon P_{st}' \sin(t') \right] + \\
& + R' M_l \left[ -3\gamma \left[ \frac{2}{We_1} a_{bal}'^2 + \frac{2}{We_2} + P_{st}' - 4G_s' \left( u_r'(t'=0) \Big|_{r'=1} - \frac{u_r'(t'=0) \Big|_{r=a_{bal}'}}{a_{bal}'} \right) \right] \left( \frac{a_{bal}'}{a'} \right)^{3\gamma} \frac{R'^2 \dot{R}'}{a'^3} + \right. \\
& \left. + \frac{2}{We_1} \frac{a_{bal}'^3 R'^2 \dot{R}'}{a^4} + \frac{2}{We_2} \frac{\dot{R}'}{R'^2} + \frac{4}{Re_l} \frac{\dot{R}'^2}{R'^2} - \frac{4}{Re_s} \left( \frac{2R' \dot{R}'^2}{a'^3} - \frac{3R'^4 \dot{R}'^2}{a'^6} + \frac{\dot{R}'^2}{R'^2} \right) + \right. \\
& \left. - 4G_s' \left( \frac{[a_{bal}' - u_r'(t'=0) \Big|_{r=a_{bal}'}] R'^2 \dot{R}'}{a'^4} - \frac{[1 - u_r'(t'=0) \Big|_{r'=1}] \dot{R}'}{R'^2} \right) - \varepsilon P_{st}' \cos(t') \right] = \\
& = \left[ (1 - M_l \dot{R}') R' + \frac{4M_l}{Re_l} + \frac{4M_l}{Re_s} \left[ \left( \frac{R'}{a'} \right)^3 - 1 \right] \right] \ddot{R}'
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\mu \varepsilon a'^3(t) = R'^3(t) - (1 - u_r'(t'=0) \Big|_{r'=1})^3 + (a_{bal}' - u_r'(t'=0) \Big|_{r'=a_{bal}'})^3 \tag{32}$$

και αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
R'(t'=0) &= 1 \\
\dot{R}'(t'=0) &= 0
\end{aligned} \tag{33}$$

Στις σχέσεις (31),(32),(33) τα μεγέθη με τον τόνο είναι αδιάστατα. Στο εξής τα αδιάστατα μεγέθη θα εμφανίζονται χωρίς τόνο για ευκολία εκτός αν δηλώνονται αλλιώς.

## 2.2 Γραμμικοποίηση του Προβλήματος

Θα εφαρμόσουμε γραμμικοποίηση στην (31). Για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε παραμένουσες τάσεις στην μεμβράνη οπότε  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$ . Προς τούτο θεωρούμε μικρές διαταραχές στην βασική λύση, δηλαδή στην κατάσταση ισορροπίας της μικροφυσαλίδας:

$$\begin{aligned} R &= 1 + \varepsilon R_d \\ a &= a_{bal} + \varepsilon a_d \\ P_\infty &= P_{st} + \varepsilon P_{st} \sin(\omega_f t) \end{aligned} \quad \text{με } \varepsilon \ll 1. \text{ Διατηρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης}$$

$$\text{ως προς } \varepsilon \text{ και χρησιμοποιώντας την σχέση } a_d = \frac{R_d}{a_{bal}^2} \quad (34)$$

που παράγεται από τη γραμμικοποίηση της σχέσης (32) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{4M_l}{\text{Re}_l} + \frac{4M_l}{\text{Re}_s} \left( \frac{1}{a_{bal}^3} - 1 \right) \right] \ddot{R}_d + \\ & + \left[ -M_l \left( \frac{2}{We_1} a_{bal}^2 + \frac{2}{We_2} + P_{st} \right) + \frac{2M_l}{We_1} a_{bal}^2 + \frac{4}{\text{Re}_l} + \frac{4}{\text{Re}_s} \left( \frac{1}{a_{bal}^3} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3\gamma M_l}{a_{bal}^3} \left( \frac{2}{We_1} a_{bal}^2 + \frac{2}{We_2} + P_{st} \right) - \frac{2}{We_1} \frac{M_l}{a_{bal}} + 4G_s M_l \left( \frac{1}{a_{bal}^3} - 1 \right) + M_l P_{st} \right] \dot{R}_d + \\ & + \left[ \frac{3\gamma}{a_{bal}^3} \left( \frac{2}{We_1} a_{bal}^2 + \frac{2}{We_2} + P_{st} \right) - \frac{2}{We_1 a_{bal}} - \frac{2}{We_2} + 4G_s \left( \frac{1}{a_{bal}^3} - 1 \right) \right] R_d = \\ & = -\varepsilon P_{st} \sin(t) - \varepsilon P_{st} M_l \cos(t) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{Η (35) είναι της μορφής: } F_1 \ddot{R}_d + F_2 \dot{R}_d + F_3 R_d = -\varepsilon P_{st} \sin(t) - \varepsilon P_{st} M_l \cos(t) \quad (36)$$

η οποία έχει λύση την:

$$R_d(t) = -B e^{\sigma_R t} \cos(\sigma_I t) + \frac{B \sigma_R - A}{\sigma_I} e^{\sigma_R t} \sin(\sigma_I t) + A \sin(t) + B \cos(t) \quad (37)$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= -\varepsilon P_{st} \frac{-F_1 + F_2 M_l + F_3}{F_2^2 + F_1^2 - 2F_1 F_3 + F_3^2} \\ B &= \varepsilon P_{st} \frac{F_1 M_l - F_3 M_l + F_2}{F_2^2 + F_1^2 - 2F_1 F_3 + F_3^2} \end{aligned} \quad (38)$$

και  $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$  είναι η λύση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $F_1\sigma^2 + F_2\sigma + F_3 = 0$ .  $\sigma_R$  φανερώνει την απόσβεση του συστήματος και  $\sigma_I$  την κυκλική ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της μικροφυσαλίδας.

Αν υπολογισθεί το  $\sigma_{Sc}$  από την (7), τότε θα προκύψει:

$$\sigma_{Sc}(f) = \frac{4\pi R_0^2}{\left[\left(\frac{f_R}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + \delta_t^2(f)} \sqrt{\frac{1 + M_l^2}{F_1^2}}, \quad \left(\frac{f_R}{f}\right)^2 = \frac{F_3}{F_1}, \quad \delta_t = \frac{F_2}{F_1}, \quad (39)$$

όπου  $f_R$  η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης της μικροφυσαλίδας,  $f$  η συχνότητα της εξωτερικής διέγερσης,  $R_0$  η ακτίνα της μικροφυσαλίδας στην ισορροπία και  $\delta_t$  ο συνολικός συντελεστής απόσβεσης.

## 2.3 Αριθμητική Προσέγγιση

Η σχέση (31) είναι μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης ως προς το χρόνο και για την επίλυση της χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης για συστήματα, η οποία έχει ακρίβεια τάξης  $O(dt^4)$ . Για να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος, η μη γραμμική διαφορική εξίσωση 2<sup>ης</sup> τάξης (σχέση 31) μετατρέπεται σε σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης:

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = Z(t) \\ \dot{Z}(t) = F(Z(t), R(t), t) \end{cases} \text{ με αρχικές τιμές } \begin{cases} R(t=0) = 1 \\ Z(t=0) = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Το χρονικό βήμα της μεθόδου θεωρείται σταθερό και επιλέγεται τέτοιο ώστε να επιτυγχάνεται σύγκλιση της μεθόδου.

Στη σχέση (8) απαιτείται να υπολογισθεί το  $\int_0^{t_f} P_{Sc,n}^2 dt$  το οποίο μέσω της ταυτότητας

του Parseval γίνεται:  $\int_0^{t_f} P_{Sc,n}^2 dt = \frac{t_f}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ , όπου  $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots, \infty$  είναι οι συντελεστές

του αναπτύγματος Fourier του διανύσματος  $P_{Sc}(t)$  και υπολογίζονται με τον αλγόριθμο του

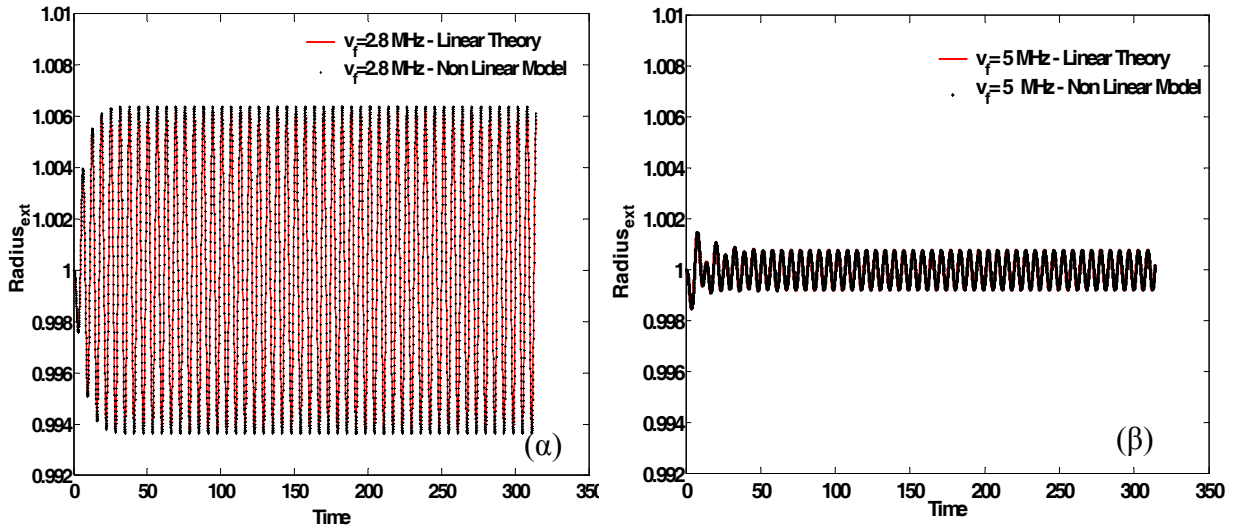
Γρήγορου Μετασχηματισμού Fourier(FFT). Αφού υπολογισθούν οι συντελεστές του αναπτύγματος Fourier του διανύσματος  $P_{sc}(t)$ , τότε ο κάθε όρος  $n$  της παραπάνω απειροσειράς διαιρεμένος με τον παρονομαστή της σχέσης (8) θα δώσει τη συνισφορά της αρμονικής  $\sigma_{sc,n}$  στο συνολικό συντελεστή σκέδασης.

## 2.4 Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Επιβάλλεται να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων που δίνει ο μη γραμμικός κώδικας με την αναλυτική λύση που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Με αυτό τον τρόπο θα πιστοποιηθεί η ορθότητα του μη γραμμικού κώδικα, όταν εφαρμοσθούν γραμμικές διαταραχές. Στις μη γραμμικές διαταραχές, η σύγκριση με τα πειράματα είναι επιβεβλημένη.

Στους παρακάτω υπολογισμούς θεωρείται ότι η μεμβράνη δεν έχει παραμένουσες τάσεις για λόγους απλούστευσης. Μία παραμετρική μελέτη της επίδρασης των παραμένουσων τάσεων στο φάσμα συχνοτήτων της μικροφυσαλίδας για μη γραμμικές διαταραχές θα δοθεί σε συγκεκριμένο κεφάλαιο. Γενικά, όταν χρησιμοποιείται γραμμικός νόμος μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων δεν επηρεάζεται σημαντικά η διατομή σκέδασης,  $\sigma_{sc,n}$ , από τις παραμένουσες τάσεις. Όταν όμως χρησιμοποιηθεί μη γραμμικός νόμος τότε αναμένεται ότι οι παραμένουσες τάσεις θα παίξουν σημαντικό ρόλο. Στο σχήμα 2 παρουσιάζεται η εξωτερική ακτίνα της μικροφυσαλίδας σε συνάρτηση του χρόνου όπως προκύπτει από την αναλυτική λύση του γραμμικού μοντέλου και την αριθμητική επίλυση του προβλήματος για μικρή διαταραχή ( $\varepsilon=0.05$ ). Είναι φανερό ότι το αριθμητικό μοντέλο συμφωνεί με την αναλυτική λύση, όταν εφαρμοσθούν γραμμικές διαταραχές

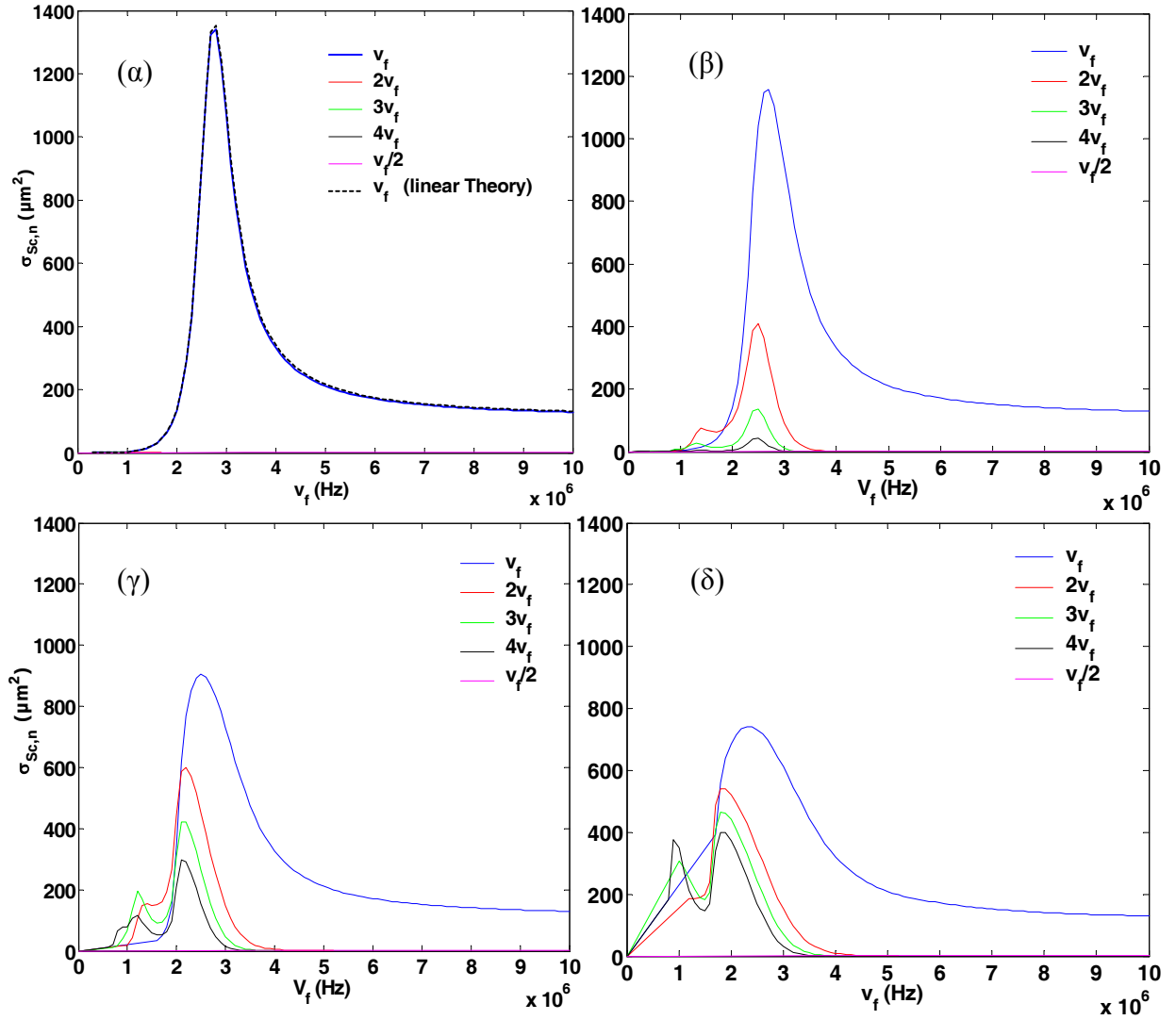
Στα παρακάτω εφαρμόζεται παραμετρική μελέτη των επιδράσεων της εξωτερικής διαταραχής, του πάχους της μεμβράνης, του μέτρου διάτμησης, του ιξώδους της μεμβράνης του μεγέθους της μικροφυσαλίδας και των παραμένουσων τάσεων στο σκεδαζόμενο σήμα πίεσης,  $\sigma_{sc,n}$ . Επίσης, μελετάται η επίδραση του εξωτερικού ρευστού (νερό – αίμα) στο  $\sigma_{sc,n}$  της μικροφυσαλίδας.



**Σχήμα 2.** Η εξωτερική ακτίνα της μικροφουσαλίδας σε συνάρτηση του χρόνου α) σε συντονισμό β) εκτός συντονισμού. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $G_s=35$  MPa,  $\alpha=3*10^{-6}$  m,  $\delta=15*10^{-9}$  m,  $E_{inf}=0.05$ .  $u_r(t=0)|_{r=l} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$

## Η Επίδραση της Εξωτερικής Διαταραχής

Στο σχήμα 3 φαίνεται η επίδραση της εξωτερικής διαταραχής στο  $\sigma_{Sc,n}$  της μικροφουσαλίδας. Όσο αυξάνεται η διαταραχή της πίεσης στο άπειρο τόσο το φάσμα συχνοτήτων της μικροφουσαλίδας εμπλουτίζεται με υψηλότερες αρμονικές, ενώ η συχνότητα συντονισμού επηρεάζεται ελάχιστα. Επίσης, όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα όσο αυξάνεται η διαταραχή τόσο αυξάνεται η συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο  $\sigma_{Sc,n}$  σε σχέση με τη συνεισφορά της συχνότητας της εξωτερικής διέγερσης. Τέλος, όταν η διαταραχή είναι μικρή το  $\sigma_{Sc,n}$  συμπίπτει με αυτό της γραμμικής θεωρίας.

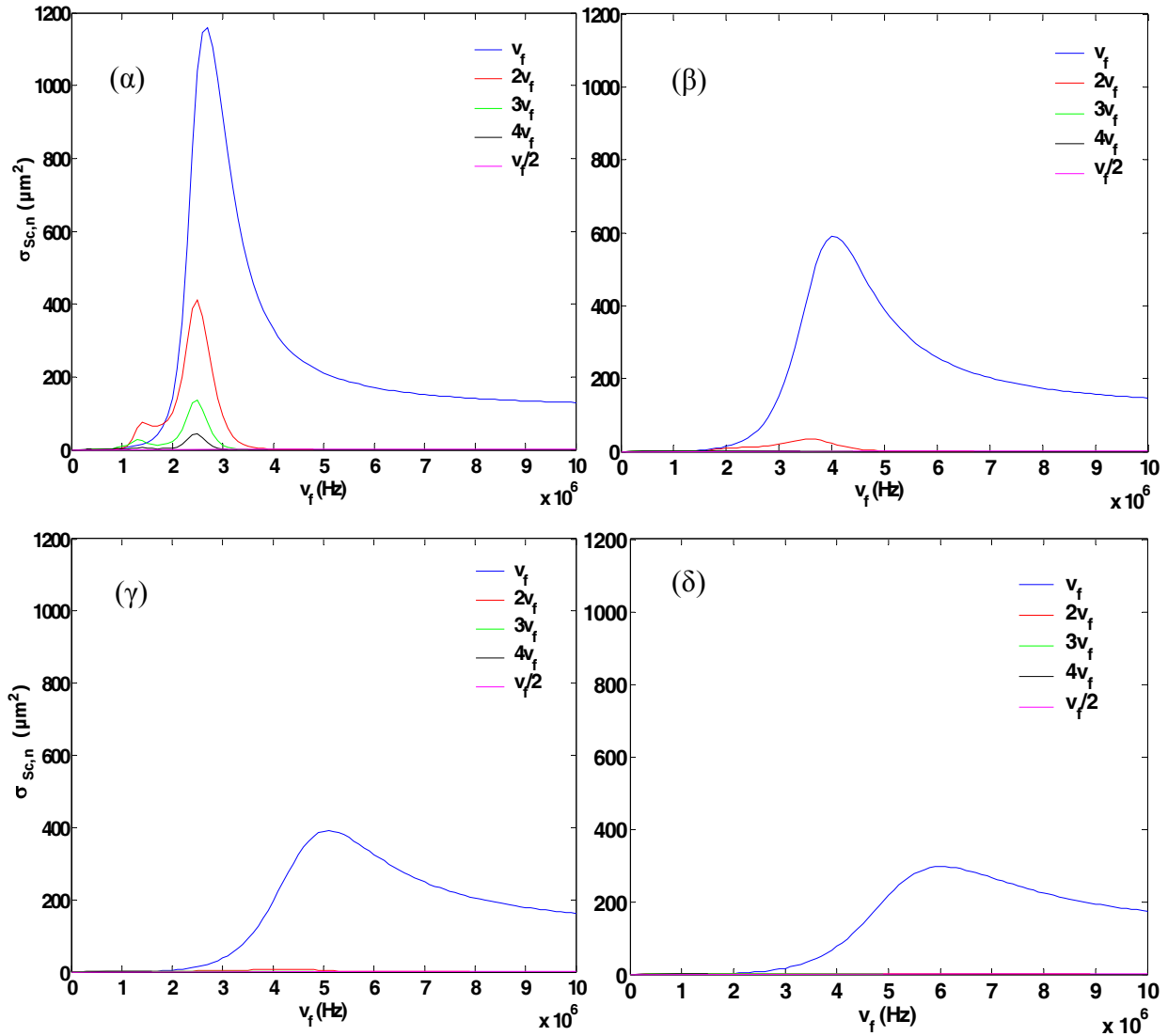


**Σχήμα 3.** Το  $\sigma_{sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για α)  $E_{inf}=0.05$ , β)  $E_{inf}=2.05$ , γ)  $E_{inf}=4.05$ , δ)  $E_{inf}=6.05$ . Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $G_s=35$  MPa,  $\alpha=3 \cdot 10^{-6}$  m,  $\delta=15 \cdot 10^{-9}$  m.  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$



## Η Επίδραση του Πάχους της Μεμβράνης

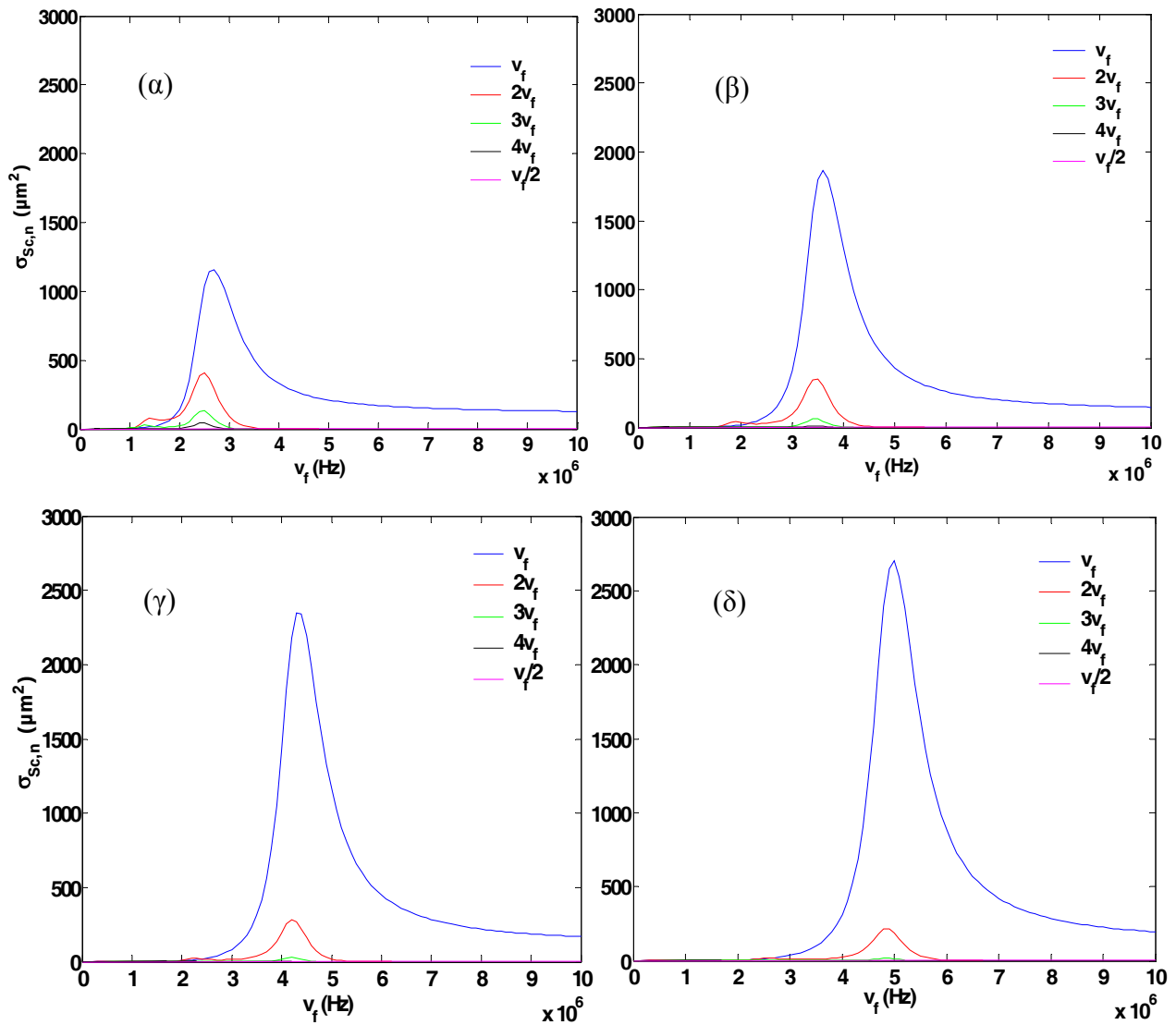
Όπως φαίνεται από το σχήμα 4 η επίδραση του πάχους της μεμβράνης στο  $\sigma_{Sc,n}$  της μικροφουσαλίδας είναι πολύ σημαντική, γιατί όχι μόνο αποσβένεται η συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών αλλά και της επιβαλλόμενης συχνότητας στο  $\sigma_{Sc,n}$ , αλλά επίσης μετατοπίζεται σε πιο υψηλές συχνότητες ο συντονισμός, όσο αυξάνεται το πάχος της μεμβράνης.



**Σχήμα 4.** Το  $\sigma_{Sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για α)  $\delta=15 \cdot 10^{-9}$  m, β)  $\delta=35 \cdot 10^{-9}$  m, γ)  $\delta=55 \cdot 10^{-9}$  m, δ)  $\delta=75 \cdot 10^{-9}$  m. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $G_s=35$  MPa,  $\alpha=3 \cdot 10^{-6}$  m,  $E_{inf}=2.05$ .  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$

## Η Επίδραση του Μέτρου Διάτμησης της Μεμβράνης

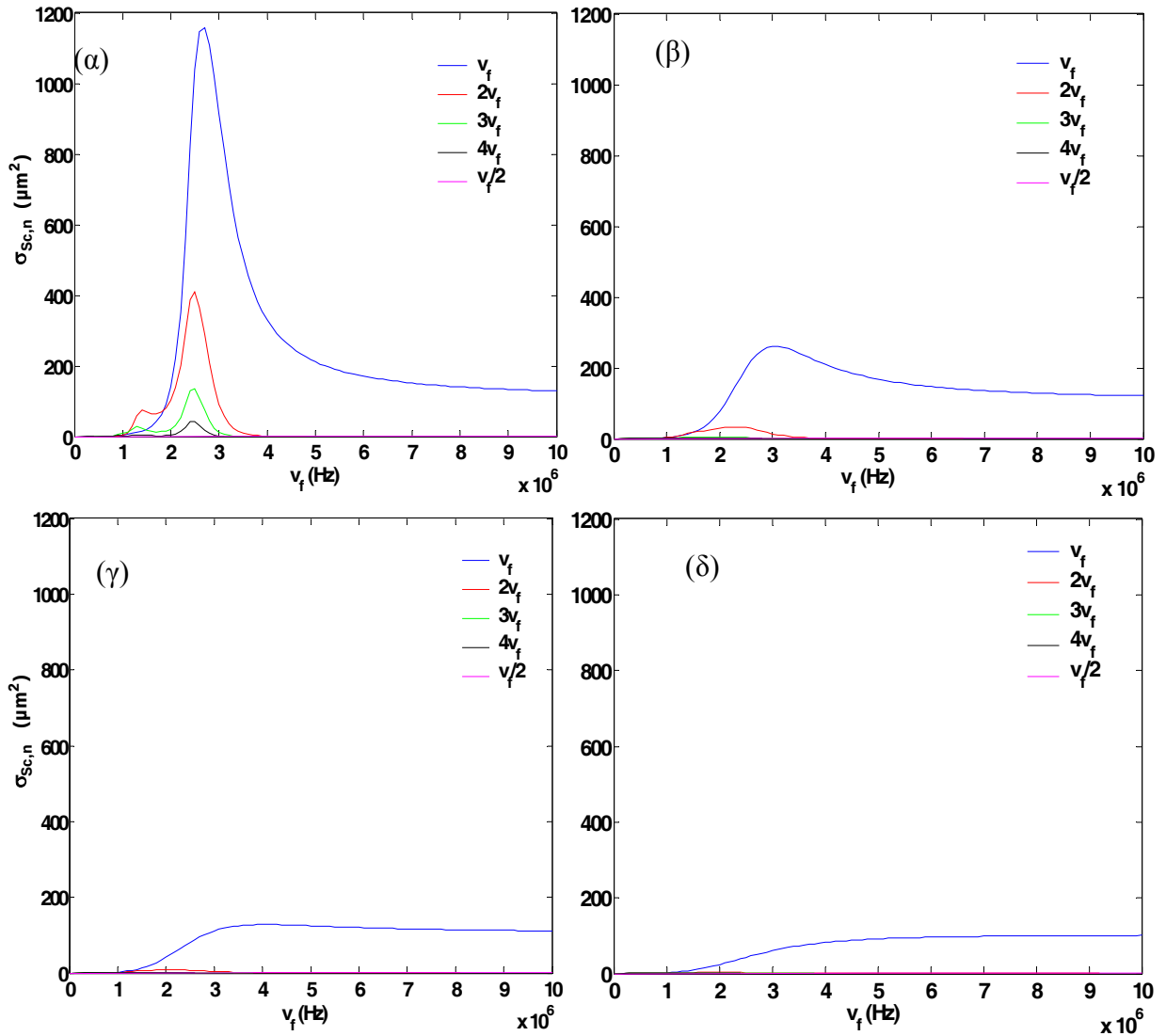
Το μέτρο διάτμησης της μεμβράνης  $G_s$  φαίνεται να επηρεάζει κυρίως το  $\sigma_{sc,n}$  της επιβαλλόμενης συχνότητας, το οποίο αυξάνει σημαντικά με την αύξηση του  $G_s$  (Σχήμα 5). Οι υψηλότερες αρμονικές αποσβένονται λίγο, ενώ το ποσοστό συμμετοχής τους στο συνολικό  $\sigma_{sc,n}$  μειώνεται σημαντικά. Επίσης, ο συντονισμός επέρχεται σε υψηλότερες συχνότητες.



**Σχήμα 5.** Το  $\sigma_{sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για α)  $G_s=35$  MPa, β)  $G_s=70$  MPa, γ)  $G_s=105$  MPa, δ)  $G_s=140$  MPa. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $\alpha=3 \times 10^{-6}$  m,  $\delta=15 \times 10^{-9}$  m,  $E_{inf}=2.05$ .  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$

## Η Επίδραση του ιξώδους της Μembrάνης

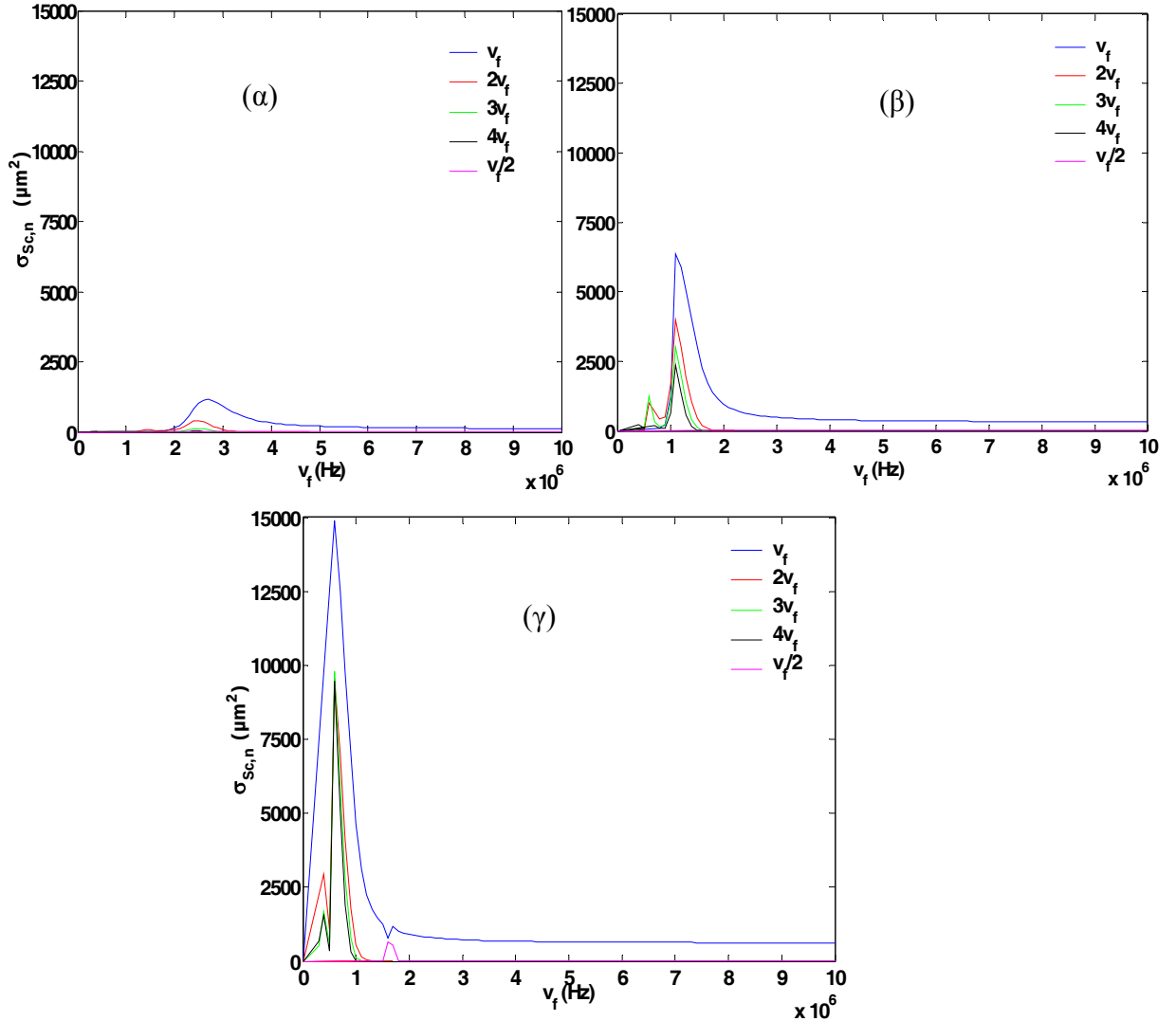
Το ιξώδες της μεμβράνης φαίνεται να επηρεάζει όλες τις αρμονικές αποσβένοντας τις, ενώ μεταφέρει το συντονισμό σε υψηλότερες συχνότητες (Σχήμα 6). Ωστόσο, η μεταφορά του συντονισμού δεν είναι τόσο σημαντική όσο η απόσβεση.



**Σχήμα 6.** Το  $\sigma_{sc,n}$  σα συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για α)  $\mu_s=0.6 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$  β)  $\mu_s=1.6 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ , α)  $\mu_s=2.6 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ , α)  $\mu_s=3.6 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325 \text{ Pa}$ ,  $\rho_l=998 \text{ kg/m}^3$ ,  $s_1=0.04 \text{ kg/s}^2$ ,  $s_2=0.005 \text{ kg/s}^2$ ,  $\mu_l=0.001 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $C_l=1500 \text{ m/s}$ ,  $G_s=35 \text{ MPa}$ ,  $\alpha=3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ ,  $\delta=15 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ,  $E_{inf}=2.05$ .  $u_r(t=0)|_{r=l} = u_r(t=0)|_{r=a_{bol}} = 0$

## Η Επίδραση του Μεγέθους της Μικροφυσαλίδας

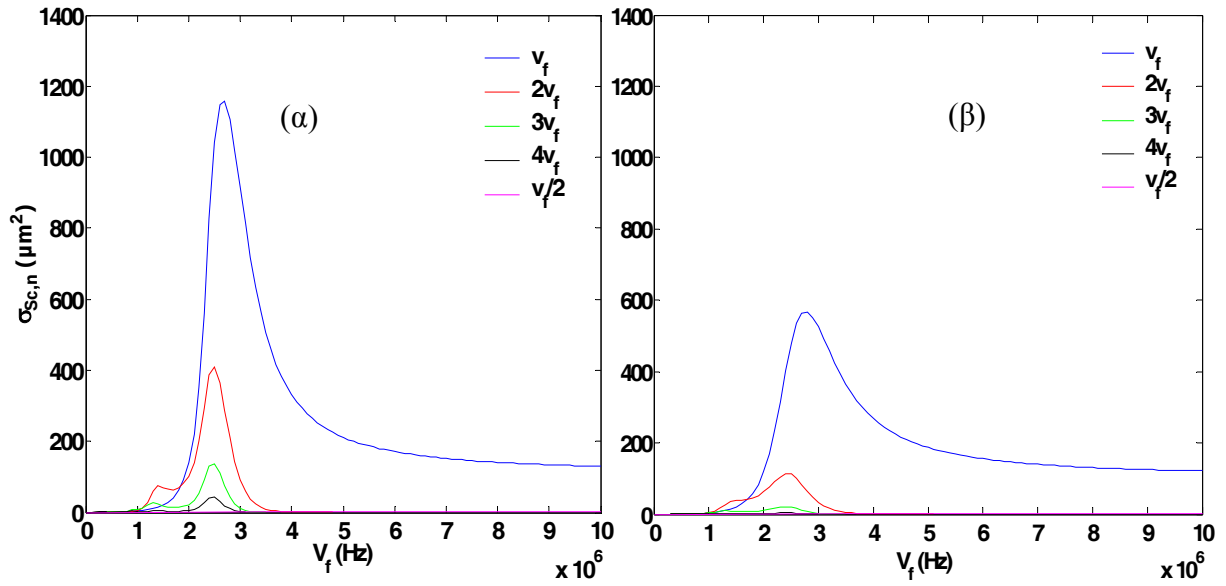
Το μέγεθος της μικροφυσαλίδας επηρεάζει σημαντικά το  $\sigma_{Sc,n}$  όλων των αρμονικών και τη συχνότητα συντονισμού (Σχήμα 7). Όσο μεγαλύτερες είναι οι μικροφυσαλίδες τόσο πιο πλούσιο σε υψηλές αρμονικές είναι το φάσμα συχνοτήτων, αν και το ποσοστό στο συνολικό  $\sigma_{Sc,n}$  αλλάζει λίγο. Η συχνότητα συντονισμού τείνει να γίνει μικρότερη για μεγαλύτερες μικροφυσαλίδες.



**Σχήμα 7.** Το  $\sigma_{Sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για α)  $\alpha=3 \cdot 10^{-6}$  m β)  $\alpha=5 \cdot 10^{-6}$  m, γ)  $\alpha=7 \cdot 10^{-6}$  m. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $G_s=35$  MPa,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $\delta=15 \cdot 10^{-9}$  m,  $E_{inf}=2.05$ .  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$

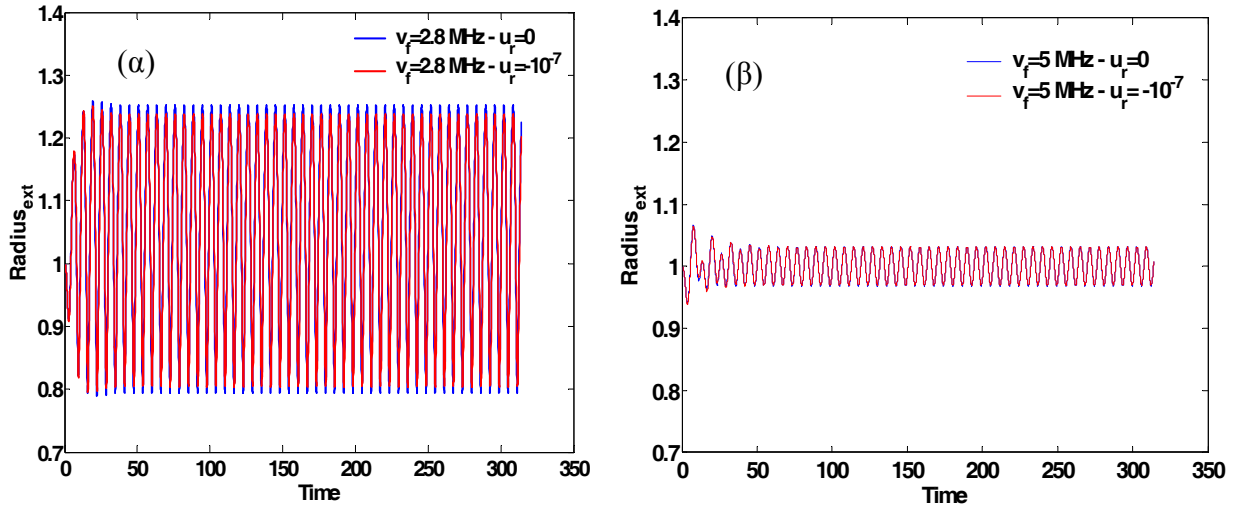
## Η Επίδραση του Ιξώδους και της Συμπιεστότητας του Εξωτερικού Ρευστού

Στο σχήμα 8 φαίνεται το  $\sigma_{Sc,n}$ , όταν το εξωτερικό ρευστό είναι νερό και αίμα. Από τα γραφήματα φαίνεται ότι στο αίμα ( $C_I=500$  m/s,  $\mu_I=0.004$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>) παρατηρείται μία απόσβεση των αρμονικών σε σχέση με ότι συμβαίνει στο νερό ( $C_I=1500$  m/s,  $\mu_I=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>), χωρίς όμως να επηρεάζεται σημαντικά η συχνότητα συντονισμού.



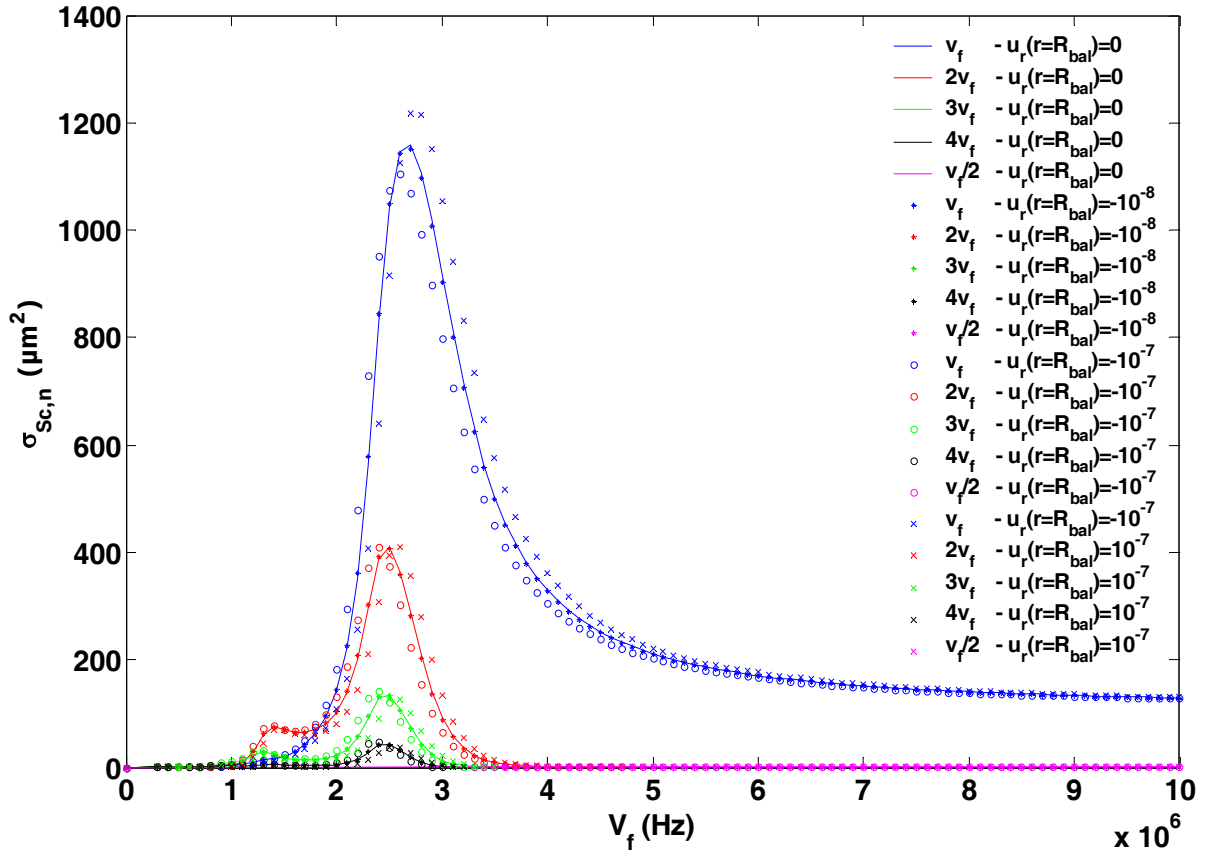
**Σχήμα 8.** Το  $\sigma_{Sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για α) νερό ( $C_I=1500$  m/s,  $\mu_I=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>) β) αίμα ( $C_I=500$  m/s,  $\mu_I=0.004$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>). Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_I=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\alpha=3*10^{-6}$  m,  $G_s=35$  MPa,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $\delta=15*10^{-9}$  m,  $E_{inf}=2.05$ .  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$

## Η Επίδραση των Παραμένουσων Τάσεων της Μεμβράνης



**Σχήμα 9.** Η εξωτερική ακτίνα της μικροφουσαλίδας σε συνάρτηση του χρόνου με και χωρίς παραμένουσες τάσεις στη μεμβράνη α) σε συντονισμό β) εκτός συντονισμού. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $G_s=35$  MPa,  $\alpha=3*10^{-6}$  m,  $\delta=15*10^{-9}$  m,  $E_{inf}=0.05$ .

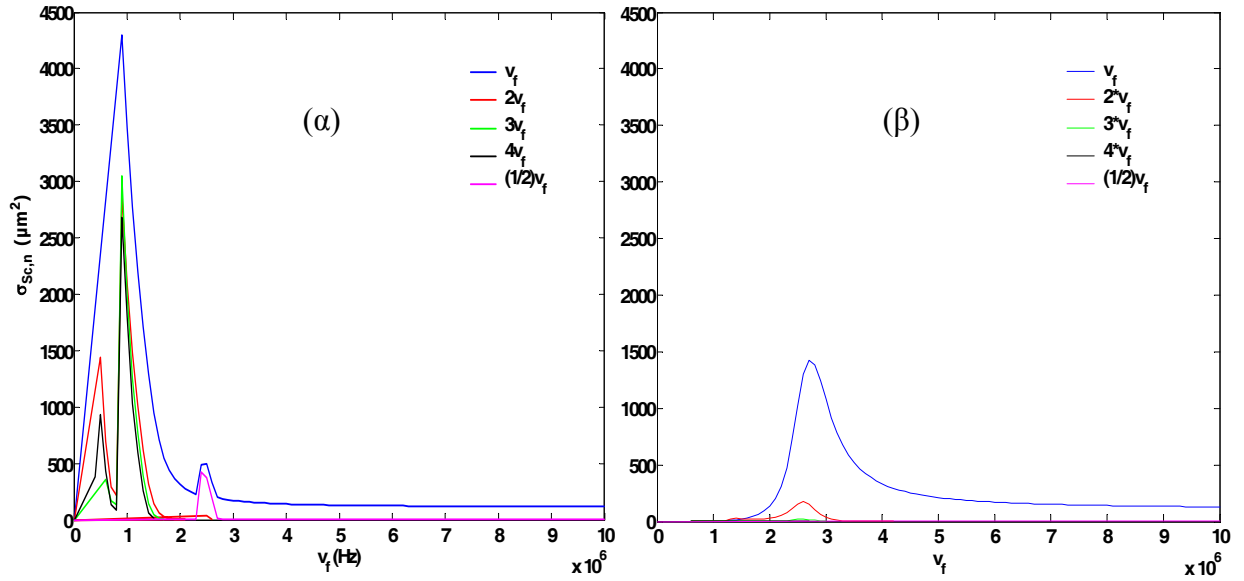
Στα σχήματα 9 και 10 φαίνεται η επίδραση των παραμένουσων τάσεων στη ταλάντωση της μικροφουσαλίδας και στο  $\sigma_{sc,n}$ , αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι οι παραμένουσες τάσεις στη μεμβράνη παίζουν μικρό ρόλο, όταν χρησιμοποιείται ο γραμμικός νόμος τάσεων – παραμορφώσεων. Αναμένεται ότι αν χρησιμοποιηθεί μη γραμμικός νόμος, η επίδραση τους θα μεγαλώσει σημαντικά, κυρίως στο μεταβατικό στάδιο ταλάντωσης της.



**Σχήμα 10.** Το  $\sigma_{sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για διάφορες τιμές των παραμέτρων τάσεων. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\alpha=3 \cdot 10^{-6}$  m,  $G_s=35$  MPa,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $\delta=15 \cdot 10^{-9}$  m,  $E_{inf}=2.05$ .

### Σύγκριση με τις Ελεύθερες Φυσαλίδες

Όπως φαίνεται από το σχήμα 11 οι ελεύθερες φυσαλίδες εμφανίζουν πολύ πιο πλούσιο φάσμα συχνοτήτων απ' ότι οι μικροφυσαλίδες (Contrast Agents) για το ίδιο μέγεθος διαταραχής, ενώ και ο συντονισμός τους επέρχεται σε πιο χαμηλές συχνότητες. Επίσης, η απόδοση στο  $\sigma_{sc,n}$  της ελεύθερης φυσαλίδας είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή των Contrast Agents. Όμως τα τελευταία συντονίζονται και αυξάνουν την απόδοσή τους στο φάσμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στους υπέρηχους, λόγω της ελαστικής τους μεμβράνης, γεγονός που καθιστά την χρήση υπέρηχων αναγκαία σε συνδυασμό με τις μικροφυσαλίδες.



**Σχήμα 11.** Το  $\sigma_{sc,n}$  σε συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας για:

α) Ελεύθερες φουσαλίδες. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.072$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.0$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\alpha=3*10^{-6}$  m,  $G_s=0$  MPa,  $\mu_s=0.0$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $\delta=0$  m,  $E_{inf}=1.0$ .

β) Contrast Agent. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{inf}=101325$  Pa,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $s_1=0.04$  kg/s<sup>2</sup>,  $s_2=0.005$  kg/s<sup>2</sup>,  $\mu_l=0.001$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $C_l=1500$  m/s,  $\alpha=3*10^{-6}$  m,  $G_s=35$  MPa,  $\mu_s=0.6$  kgm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>,  $\delta=15*10^{-9}$  m,  $E_{inf}=1.0$ .  $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{bal}} = 0$

Συνοψίζοντας, η συνεισφορά στο  $\sigma_{sc,n}$  των υψηλότερων αρμονικών μπορεί να αυξηθεί είτε με την αύξηση της εξωτερικής διαταραχής  $E_{inf}$ , για δεδομένες ιδιότητες μεμβράνης και γεωμετρικά χαρακτηριστικά της μικροφουσαλίδας, είτε με την αύξηση του μεγέθους της μικροφουσαλίδας για το ίδιο μέγεθος της εξωτερικής διαταραχής. Στην πρώτη περίπτωση αυξάνεται η ποσοστιαία συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο  $\sigma_{sc,n}$ , ενώ η συχνότητα συντονισμού σχεδόν δεν αλλάζει. Στη δεύτερη περίπτωση, η συχνότητα συντονισμού μειώνεται, ενώ η ποσοστιαία συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο  $\sigma_{sc,n}$ , περίπου διατηρείται.



Η αύξηση του μέτρου διάτμησης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της συνεισφοράς στο  $\sigma_{sc,n}$  της επιβαλλόμενης συχνότητας, ενώ η ποσοστιαία συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών μειώνεται. Παράλληλα, αυξάνεται σημαντικά η συχνότητα συντονισμού.

Η επίδραση του ιξώδους και του πάχους της μεμβράνης είναι σχεδόν παρόμοια όσον αφορά τη συνεισφορά των αρμονικών στο  $\sigma_{sc,n}$ . Εμφανίζεται απόσβεση όλων των αρμονικών. Ωστόσο, η ποσοστιαία συμμετοχή των αρμονικών στο  $\sigma_{sc,n}$  φαίνεται να μειώνεται με την αύξηση του πάχους της μεμβράνης, σε αντίθεση με την αύξηση του ιξώδους της μεμβράνης που φαίνεται να διατηρείται. Επίσης, η αύξηση του πάχους της μεμβράνης επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τη συχνότητα συντονισμού την οποία αυξάνει, σε αντίθεση με την αύξηση του ιξώδους της μεμβράνης που δεν την επηρεάζει σημαντικά.

Επίσης, η επίδραση της συμπιεστότητας και του ιξώδους του εξωτερικού ρευστού φαίνεται να επηρεάζει τη συνεισφορά των αρμονικών στο  $\sigma_{sc,n}$ . Εμφανίζεται απόσβεση όλων των αρμονικών, ενώ και η ποσοστιαία αναλογία συμμετοχής των υψηλότερων αρμονικών φαίνεται να μειώνεται. Ακόμα, η συχνότητα συντονισμού δεν φαίνεται να επηρεάζεται σημαντικά.

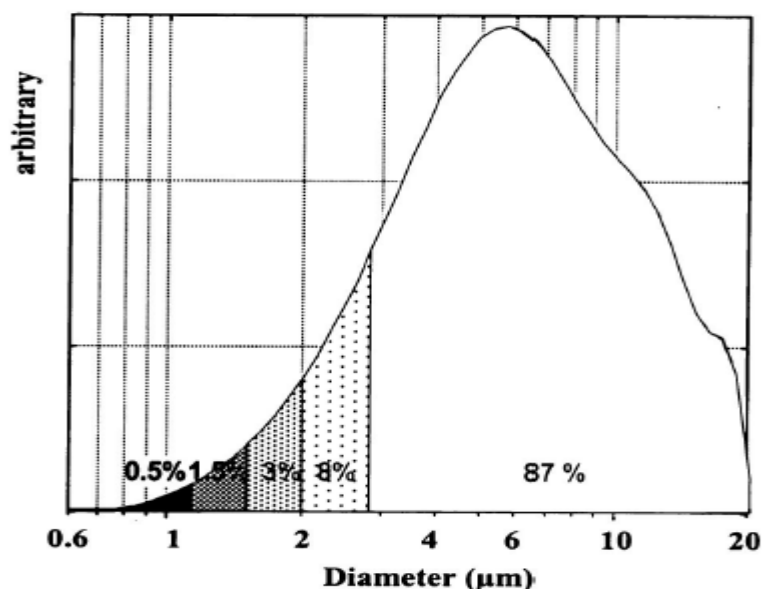
Ακόμα, η επίδραση των παραμένουσων τάσεων στο  $\sigma_{sc,n}$  φαίνεται να είναι αμελητέα, ενώ οι ελεύθερες φυμαλίδες εμφανίζουν πολύ πιο πλούσιο φάσμα σε σχέση με τις μικροφυμαλίδες, ενώ και ο συντονισμός τους εμφανίζεται σε αρκετά πιο χαμηλή συχνότητα. Τα παραπάνω αναφέρονται σε γραμμικό καταστατικό νόμο μεταξύ – τάσεων παραμορφώσεων. Αναμένεται σημαντική αλλαγή της επίδρασης των παραμένουσων τάσεων και του μέτρου διάτμησης της μεμβράνης στο  $\sigma_{sc,n}$ , όταν χρησιμοποιηθεί μη γραμμικός νόμος.

### **Σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα**

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, οι μικροφυμαλίδες που χρησιμοποιούνται στις εφαρμογές και στα πειράματα εμφανίζονται πάντα σε πληθυσμούς και το μέγεθος τους ακολουθεί ορισμένη κατανομή. Για το λόγο αυτό, ορίζεται ο συντελεστής [27]

$$h(v_f) = \frac{1}{4\pi} \sum_r n(r) \sigma_{sc}(v_f, r) \quad (41)$$

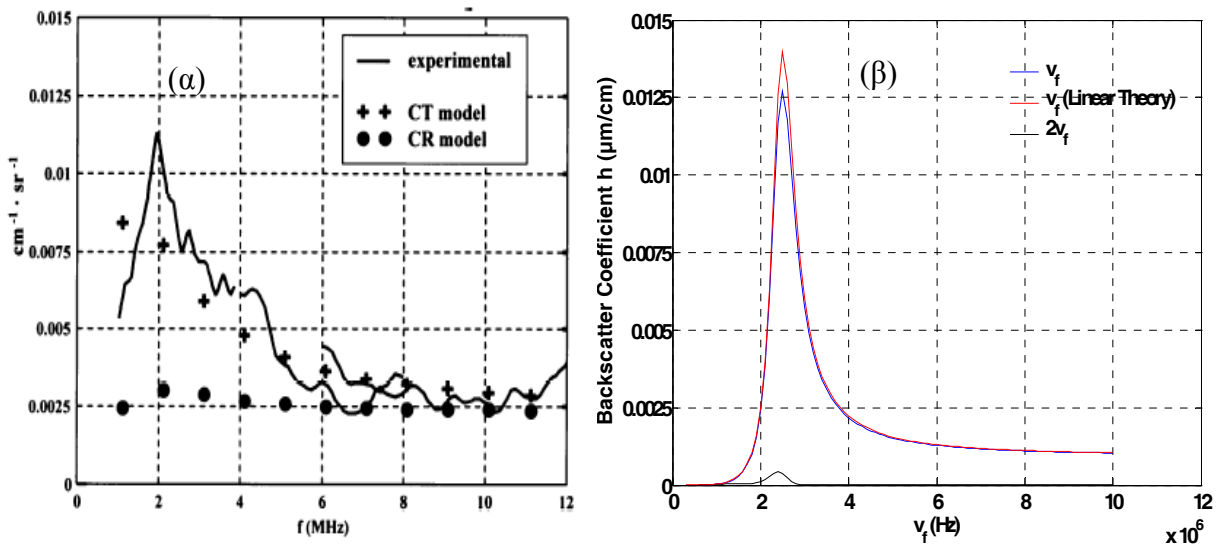
όπου  $n(r)$  είναι η συγκέντρωση των μικροφουσαλίδων με ακτίνα  $r$ . Όπως φάνηκε από την παραπάνω ανάλυση, το  $\sigma_{sc,n}$  εξαρτάται σε πολύ σημαντικό βαθμό από το μέγεθος της μικροφουσαλίδας. Επίσης, τα πειραματικά αποτελέσματα των Jean – Marie Gorce et al [27] έδειξαν παρομοίως ότι το  $\sigma_{sc}$  εξαρτάται από τον συνολικό όγκο που έχουν οι μικροφουσαλίδες με ένα ορισμένο μέγεθος και όχι από τον αριθμό των μικροφουσαλίδων με το ίδιο μέγεθος. Στο σχήμα 12 εμφανίζεται η συγκέντρωση κατ' όγκο των μικροφουσαλίδων από το πείραμα των Jean – Marie Gorce et al [27] έχοντας θεωρήσει πέντε κλάσεις. Από το γράφημα φαίνεται ότι το 87% του όγκου των φουσαλίδων έχουν διάμετρο από 2.8-20  $\mu\text{m}$  με μέση τιμή περίπου τα 6.5  $\mu\text{m}$ .



**Σχήμα 12.** Η συγκέντρωση κ.ο. των μικροφουσαλίδων στο πείραμα των Jean – Marie Gorce et al.

Για να γίνει σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τα πειραματικά, θεωρήθηκε η μέση τιμή του μεγέθους της μικροφουσαλίδας από κάθε κλάση και υπολογίστηκε το  $\sigma_{sc}$  για κάθε μέγεθος. Έπειτα, χρησιμοποιήθηκε η σχέση (41) για τον υπολογισμό του συντελεστή  $h$ , όπου  $n(r)$  θεωρήθηκε η συγκέντρωση κατ' όγκο των μικροφουσαλίδων. Δεδομένα για το ιξώδες, το πάχος και το μέτρο ελαστικότητας της μεμβράνης προέκυψαν από τις μέσες τιμές των παραμέτρων που αναφέρονται στην ίδια εργασία [27] ( $G_s=36.67 \text{ MPa}$ ,  $m_s=0.5968 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $\delta=15 \text{ nm}$ ). Το μέσο μεταφοράς των ακουστικών διαταραχών ήταν το νερό, ενώ η διαταραχή της πίεσης που εφαρμόστηκε ήταν  $E_{inf}=0.5$  (υπερπίεση 50 KPa). Στο

σχήμα 13 συγκρίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα με τα πειραματικά, όσον αφορά τον συντελεστή  $h$ .



**Σχήμα 13.** Ο συντελεστής  $h$  (backscatter coefficient) σα συνάρτηση της εξωτερικής συχνότητας α) Πείραμα των Jean – Marie Gorce et al, β) Παρόν αριθμητικό μοντέλο. Δεδομένα προσομοίωσης:  $\gamma=1.4$ ,  $P_{\text{inf}}=101325 \text{ Pa}$ ,  $\rho_l=998 \text{ kg/m}^3$ ,  $s_1=0.04 \text{ kg/s}^2$ ,  $s_2=0.005 \text{ kg/s}^2$ ,  $G_s=36.67 \text{ MPa}$ ,  $\mu_s=0.5968 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $\delta=15 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ ,  $E_{\text{inf}}=0.5$ .  
 $u_r(t=0)|_{r=1} = u_r(t=0)|_{r=a_{\text{bol}}} = 0$

Είναι φανερό ότι αν και το μοντέλο προσεγγίζει σε μεγάλο βαθμό τα πειραματικά αποτελέσματα, υπάρχει ορισμένη απόκλιση η οποία μάλλον οφείλεται στην υποεκτίμηση των μηχανισμών απόσβεσης της ενέργειας. Η απόκλιση αυτή μπορεί να οφείλεται στους εξής παράγοντες:

- 1) Η πίεση που στέλνει πίσω η μικροφουσαλίδα υπολογίζεται πάνω στη μεμβράνη της μικροφουσαλίδας, ενώ στα πειράματα η συλλογή του σήματος γίνεται σε ορισμένη απόσταση από τη μικροφουσαλίδα

- 2) Ο γραμμικός καταστατικός νόμος που χρησιμοποιείται για τη μεμβράνη δεν είναι αυτός που χαρακτηρίζει το υλικό της μεμβράνης. Αναμένεται ότι η χρήση του μη γραμμικού καταστατικού νόμου θα διορθώσει σε σημαντικό βαθμό την απόκλιση.
- 3) Η θεώρηση των μέσων τιμών από κάθε κλάση μειώνει την ακρίβεια των υπολογισμών. Απαιτείται να θεωρηθούν περισσότερες τιμές από κάθε κλάση και κυρίως από την κλάση με το μεγαλύτερο ποσοστό κατ' όγκο στις μικροφυσαλίδες.
- 4) Τέλος, τα δεδομένα για το ιξώδες, το πάχος και το μέτρο ελαστικότητας της μεμβράνης προέκυψαν, όπως αναφέρθηκε, από μέσες τιμές των παραμέτρων που δίνονται στην εργασία των Jean – Marie Gorce et al [27]. Για τη σωστή σύγκριση απαιτείται να χρησιμοποιηθούν μετρήσιμες τιμές για το ιξώδες, το πάχος και το μέτρο ελαστικότητας της μεμβράνης, αφού τα μεγέθη αυτά επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση της μικροφυσαλίδας. Επι πλέον ενδέχεται να παίζει ρόλο στην απόκριση της φυσαλίδας και η απόσβεση της ενέργειας λόγω μεταφοράς θερμότητας, γεγονός που ίσως ευθύνεται για το μεγαλύτερο πλάτος της σκεδαζόμενης ενέργειας που παρατηρείται στους υπολογισμούς με βάση το μοντέλο που αναπτύχθηκε στην παρούσα εργασία.

## Κεφάλαιο 3 Η Δυναμική της Ταλάντωσης και της Κατάρρευσης της Μικροφυσαλίδας

Όπως φαίνεται και από πειραματικά αποτελέσματα [9], οι μικροφυσαλίδες με μεμβράνη από λιπίδιο καταρρέουν σε 4 ή περισσότερες ελεύθερες μικροφυσαλίδες υπό την επίδραση ισχυρής ακουστικής πίεσης. Προκαταρκτική ανάλυση των πειραματικών μετρήσεων με την βοήθεια κάμερας υψηλής ταχύτητας, οδήγησε στην εκτίμηση [9] ότι η κατάρρευση της μικροφυσαλίδας οφείλεται στην εμφάνιση αστάθειας Rayleigh – Taylor αμέσως μετά την χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Στο παρόν κεφάλαιο μελετώνται οι αξονοσυμμετρικές ταλαντώσεις και ο τρόπος κατάρρευσης μικροφυσαλίδων, όταν αυτές υπόκεινται σε διαταραχές της πίεσης στο άπειρο. Οι υπολογισμοί καλύπτουν ευρύ φάσμα διαταραχών και ιξωδοελαστικών παραμέτρων της μεμβράνης, ενώ εστιάζουν στα τελευταία στάδια της κατάρρευσης προκειμένου να ταυτοποιηθεί ο μηχανισμός κατάρρευσης. Όπως θα φανεί και στα παρακάτω αυτός δεν συνδέεται με την αστάθεια τύπου Rayleigh Taylor αλλά με την αστάθεια λυγισμού της μεμβράνης, καθώς λαμβάνει χώρα πάντα στην φάση συμπίεσης της μικροφυσαλίδας.

Η δομή του κεφαλαίου 3 έχει ως εξής: Στο υποκεφάλαιο 3.1 αναλύεται το πρόβλημα, αναφέρονται οι παραδοχές και παράγονται οι εξισώσεις που περιγράφουν την δυναμική συμπεριφορά της διεπιφάνειας της μικροφυσαλίδας. Έπειτα, παράγεται η ολοκληρωτική εξίσωση η οποία συνδέει το δυναμικό ταχύτητας με την ταχύτητα κάθετα στην διεπιφάνεια, η χρήση της οποίας μειώνει τις απαιτήσεις για διακριτοποίηση του προβλήματος κατά μία διάσταση. Στο υποκεφάλαιο 3.2 γίνεται η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων του προβλήματος. Συγκεκριμένα, εφαρμόζονται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για τη διακριτοποίηση της διεπιφάνειας και η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων για τη διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης, ενώ για την χρονική ολοκλήρωση των εξισώσεων χρησιμοποιείται η μέθοδος Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης. Τέλος, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος. Στο υποκεφάλαιο 3.3 γίνεται γραμμικοποίηση των εξισώσεων και παράγονται οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της μικροφυσαλίδας. Τέλος, στο υποκεφάλαιο 3.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, τα οποία συγκρίνονται με τη γραμμική θεωρία και τα πειράματα.

### 3.1 Θεωρητική Ανάλυση

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω θα μελετηθεί η δυναμική συμπεριφορά μικροφουσαλίδας η οποία ταλαντώνεται λόγω μεταβολών της πίεσης στην κυρίως μάζα του ρευστού στο οποίο ευρίσκεται. Θα θεωρήσουμε ότι η μικροφουσαλίδα στο εσωτερικό της περιέχει συμπιεστό αέριο ενώ το εξωτερικό ρευστό είναι ασυμπίεστο. Λόγω της συμπιεστότητας της μικροφουσαλίδας η τελευταία εκτελεί ταλαντώσεις με συχνότητα που καθορίζεται από την εξωτερική διαταραχή. Για συχνότητα διαταραχής στο φάσμα των υπερήχων, 1 έως 10 MHz, η ταχύτητα της διεπιφάνειας και κατά συνέπεια του ρευστού είναι μεγάλη. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε σε πρώτη προσέγγιση ότι έχουμε αστρόβιλη ροή υψηλού αριθμού Reynolds και επομένως μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση του ιξώδους. Επίσης, θα θεωρήσουμε ότι έχουμε αξονική συμμετρία, γεγονός που μειώνει κατά μία διάσταση τις απαιτήσεις διακριτοποίησης του προβλήματος. Η μεμβράνη με την οποία περιβάλλεται η μικροφουσαλίδα θεωρείται ότι έχει αμελητέο πάχος  $\delta$  και ότι δεν υπάρχουν παραμένουσες τάσεις στην κατάσταση ισορροπίας. Επίσης, θα θεωρήσουμε αμελητέα την επίδραση της επιφανειακής τάσης μεταξύ αερίου – μεμβράνης και μεμβράνης - εξωτερικού ρευστού.

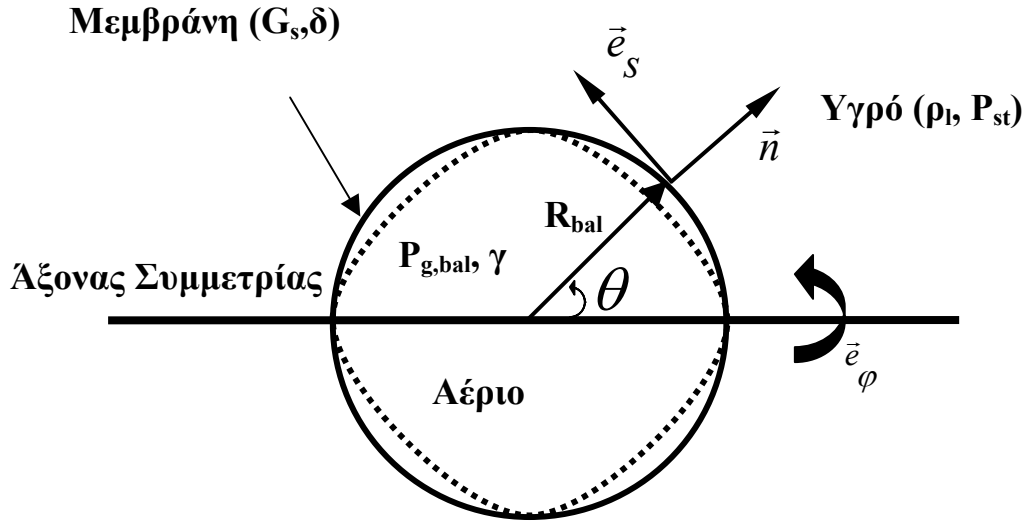
Θα εφαρμόσουμε αδιαστατοποίηση θεωρώντας σαν χαρακτηριστικά μεγέθη:

$$\text{Χαρακτηριστικό μήκος } L^* = R_{bal} \quad (1)$$

$$\text{Χαρακτηριστική πίεση } P^* = \rho_l R_{bal}^2 \omega_f^2 \quad (2)$$

$$\text{Χαρακτηριστικός χρόνος } t^* = \frac{1}{\omega_f}, \quad (3)$$

όπου  $R_{bal}$  η ακτίνα της σφαιρικής μικροφουσαλίδας στην κατάσταση ισορροπίας,  $\rho_l$  η πυκνότητα του εξωτερικού ρευστού της μικροφουσαλίδας και  $\omega_f$  η κυκλική συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής. Στο εξής οι αδιάστατες μεταβλητές θα εμφανίζονται χωρίς τόνο και αυτές με διαστάσεις με τόνο.



**Σχήμα 1.** Γεωμετρικά χαρακτηριστικά της ταλάντωσης και κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας.

Αρχικά η μικροφυσαλίδα είναι σφαιρική, ακτίνας  $R_{bal}$ , η οποία ισορροπεί μέσα σε ρευστό πίεσης  $P_{st}$  (Σχήμα 1). Τότε, η πίεση στο εσωτερικό της φυσαλίδας, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν παραμένουσες τάσεις, προκύπτει ότι είναι:

$$P_{g,bal} = P_{st} \quad (4)$$

Αν κατά την χρονική στιγμή  $t=0$  μεταβληθεί η πίεση στο ρευστό εξωτερικά της φυσαλίδας ως:

$$P_{\infty} = P_{st} + \varepsilon_{inf} P_{st} \cos(t), \quad (5)$$

όπου  $\varepsilon_{inf}$ , ο συντελεστής της διαταραχής της πίεσης στο άπειρο, τότε παύει η ισορροπία που εκφράζεται από την (4) και η μικροφυσαλίδα αρχίζει να εκτελεί ταλαντώσεις λόγω της συμπιεστότητας της.

Για την περιγραφή της διεπιφάνειας της φυσαλίδας θα υιοθετηθεί η χρήση Λαγκραντζιανών σωματιδίων, όπου την χρονική στιγμή  $t=0$  θεωρούμε συγκεκριμένα σωματίδια της διεπιφάνειας και μελετάμε πώς εξελίσσονται στον χρόνο, η θέση τους και οι τιμές του δυναμικού και της ταχύτητας κινούμενοι μαζί μ' αυτά. Με τον τρόπο αυτόν υπολογίζεται η σχετική μετατόπιση των σωματιδίων η οποία, ουσιαστικά, δίνει την παραμόρφωση της διεπιφάνειας και επομένως τις τάσεις που αναπτύσσονται στη μεμβράνη. Ωστόσο, στη μέθοδο αυτή τα σωματίδια έχουν την τάση να συγκεντρώνονται σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου. Το πρόβλημα ξεπερνιέται με την ανακατανομή των σωματιδίων της διεπιφάνειας, όταν αυτά πλησιάζουν πολύ κοντά, δηλαδή όταν η μικρότερη

μεταξύ τους απόσταση γίνει κάποιο ποσοστό του αντίστοιχου ισοκατανεμημένου μήκους τόξου, έτσι ώστε το νέο πλέγμα που δημιουργείται να χωρίζει σε ίσα μήκη τόξου τις αποστάσεις των σωματιδίων μεταξύ τους.

### 3.1.1 Η Περιγραφή της Διεπιφάνειας της Μικροφυσικής κατά Lagrange

Στην περιγραφή κατά Lagrange ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η μεταβλητή  $\xi$ , η οποία παίρνει τιμές μεταξύ 0 και N (όπου N είναι ο αριθμός των σωματιδίων που θεωρούμε και των οποίων η κίνηση παρακολουθείται πάνω στη διεπιφάνεια) και ο χρόνος t. Επομένως, η μεταβλητή  $\xi$  φανερώνει ουσιαστικά την ταυτότητα του κάθε σωματιδίου ξεχωριστά. Λόγω αξονικής συμμετρίας, η γωνία  $\varphi$  του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων (r,  $\theta$ ,  $\varphi$ ) θα θεωρηθεί ότι δεν παίζει ρόλο και θα υποτεθεί ότι  $\varphi=0$ . Η αζιμουθιακή γωνία  $\theta$  και η ακτινική θέση r εμφανίζονται σαν εξαρτημένες μεταβλητές των  $\xi$  και t, δηλαδή:  $r = r(\xi, t)$  και  $\theta = \theta(\xi, t)$

Επίσης, η μεταβλητή  $\xi$  συνδέεται με το μήκος τόξου, S, της γενέτειρας του σχήματος της φυσαλίδας κάθε χρονική στιγμή με τη σχέση:

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \xi} \right|_t = \sqrt{\left( \left. \frac{\partial r}{\partial \xi} \right|_t \right)^2 + r^2 \left( \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_t \right)^2} = \sqrt{r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2} \quad (6)$$

Ξεκινώντας από το διάνυσμα θέσης:

$$\vec{R} = r \vec{e}_r \quad (7)$$

το οποίο περιγράφει τη θέση της διεπιφάνειας κάθε χρονική στιγμή και θεωρώντας ότι η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου της διεπιφάνειας, που τη χρονική στιγμή  $t=0$  βρίσκεται στη θέση  $(r_0, \theta_0)$ , είναι:

$$\vec{U}_{\sigma\omega\mu} = \left. \frac{d\vec{R}}{dt} \right|_{r_0, \theta_0}, \quad (8)$$

προκύπτει ότι:

$$U_r = \left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} \quad (9)$$

και

$$U_\theta = r \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{r_0, \theta_0}. \quad (10)$$



Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι

$$\vec{U}_{\sigma\omega\mu} = U_s \vec{e}_s + U_n \vec{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \vec{e}_s + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \vec{n} \quad (11)$$

όπου  $\vec{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη διεπιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό της φυσαλίδας,

$$\vec{n} = \frac{r\theta_s}{\sqrt{r_s^2 + r^2\theta_s^2}} \vec{e}_r - \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + r^2\theta_s^2}} \vec{e}_\theta, \quad (12)$$

και  $\vec{e}_s$  το εφαπτόμενο διάνυσμα στη διεπιφάνεια:

$$\vec{e}_s = \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + r^2\theta_s^2}} \vec{e}_r + \frac{r \cdot \theta_s}{\sqrt{r_s^2 + r^2\theta_s^2}} \vec{e}_\theta \quad (13)$$

τότε συνδυασμός των (6),(9),(10),(11),(12) και (13) θα δώσει

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{\Phi_\xi r_\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial n} r \theta_\xi \sqrt{r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2}}{r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2} \quad (14)$$

και

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{\Phi_\xi \theta_\xi r - \frac{\partial \Phi}{\partial n} r_\xi \sqrt{r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2}}{r(r_\xi^2 + r^2 \theta_\xi^2)}, \quad (15)$$

λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$$\sqrt{r_s^2 + r^2 \theta_s^2} = 1. \quad (16)$$

Στα παραπάνω,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  υποδηλώνει παραγωγή κάθετα στη διεπιφάνεια και προς το εξωτερικό της μικροφυσαλίδας.

Εάν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bernoulli μεταξύ του άπειρου και της διεπιφάνειας του ρευστού και της φυσαλίδας, τότε θα προκύψει σε αδιάστατη μορφή,

$$P_l + \frac{|\vec{\nabla} \Phi|^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = P_\infty \quad (17)$$

όπου  $P_l$  είναι η πίεση του ρευστού που περιβάλλει την φυσαλίδα υπολογισμένη στη διεπιφάνεια.

Από τον ορισμό της υλικής παραγώγου προκύπτει:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - |\vec{\nabla} \Phi|^2 \quad (18)$$

Το ισοζύγιο κάθετων τάσεων στη διεπιφάνεια θα δώσει σε αδιάστατη μορφή:

$$\vec{n} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^{υγρδ} - \underline{\underline{\sigma}}^{αέριο}) \cdot \vec{n} = \Delta F_n \Rightarrow P_l = P_g - \Delta F_n, \quad (19)$$

όπου  $\Delta F_n$  είναι η κάθετη συνιστώσα των ελαστικών τάσεων που αναπτύσσονται μέσα στη μεμβράνη. Επειδή η ταχύτητα της μικροφυσαλίδας είναι μεγάλη, εφόσον η συχνότητα της εξωτερικής διαταραχής  $\omega_f$  είναι μεγάλη, το ισοζύγιο εφαπτομενικών τάσεων θα αποτελείται από όρους ανώτερης τάξης σε σχέση με τους όρους του ισοζυγίου των ορθών τάσεων. Έτσι, όταν ο αριθμός  $Re$  που χαρακτηρίζει τα πρόβλημα,  $Re = \frac{R_0^2 \omega_f}{\nu}$ , είναι μεγάλος το ισοζύγιο διατμητικών τάσεων δεν χρειάζεται να ικανοποιηθεί. Για τον λόγο αυτό λαμβάνουμε υπόψη μόνο το ισοζύγιο ορθών τάσεων.

$$\Delta F = \Delta F_n \vec{n} + \Delta F_s \vec{e}_s = -\vec{\nabla}_s \cdot \underline{\underline{T}} \quad (20)$$

όπου

$$\vec{\nabla}_s = \sum_{i=1}^2 \vec{a}^i \frac{\partial}{\partial u_i} \quad i=1,2 \text{ είναι η επιφανειακή απόκλιση (surface gradient), } \vec{a}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u_i}, i=1,2 \text{ και}$$

$$\vec{a}^i = \frac{(-1)^j (\vec{a}_j \times \vec{n})}{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \times \vec{n}|}, \quad i, j=1,2 \quad i \neq j \text{ είναι τα συμμεταβλητά και αντιμεταβλητά διανύσματα}$$

βάσης (covariant and contravariant basis vectors) αντίστοιχα,  $\vec{R}$  είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου  $u_i, i=1,2$  της διεπιφάνειας και  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tau}} + \vec{q}\vec{n}$ , ο τανυστής των ελαστικών τάσεων της μεμβράνης.  $\underline{\underline{\tau}}$  είναι ο τανυστής των εφελκυστικών – θλιπτικών τάσεων στη μεμβράνη και  $\vec{q}\vec{n}$  ο τανυστής των διατμητικών τάσεων στην μεμβράνη οι οποίες διατμητικές τάσεις παράγονται από την αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη [18]. Στην παρούσα μελέτη θα θεωρήσουμε ότι η αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη είναι αμελητέα γιατί η μεμβράνη της φυσαλίδας έχει αμελητέο πάχος.

Ορίζεται επίσης ο τανυστής καμπυλότητας της διεπιφάνειας ως  $\underline{\underline{B}} \equiv \vec{\nabla}_s \vec{n}$  οι συνιστώσες του οποίου ως προς τη βάση  $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{n}]$  είναι  $b_{ij} = \vec{a}_i \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \vec{a}_j, \quad i, j=1,2$ . Ο  $\underline{\underline{B}}$  είναι 2x2 συμμετρικός πίνακας. Για τη διαγωνοποίηση του και την εύρεση των κύριων διευθύνσεων πρέπει να λυθεί το ιδιοπρόβλημα  $\underline{\underline{B}} \cdot \vec{t}_i = k_i \cdot \vec{t}_i, i=1,2$ , όπου οι ιδιοτιμές  $k_i$  είναι οι καμπυλότητες στις κύριες διευθύνσεις, ενώ τα ιδιοδιανύσματα  $\vec{t}_i$  εκφράζονται ως προς τα  $\vec{a}_i$ . Αν λυθεί το ιδιοπρόβλημα προκύπτει ότι  $\vec{t}_1 = \vec{e}_s, \vec{t}_2 = \vec{e}_\phi$  και

$$k_1 = k_s = \frac{r_\xi^2 \theta_\xi}{((r\theta_\xi)^2 + r_\xi^2)^{3/2}} + \frac{rr_\xi \theta_{\xi\xi} - rr_{\xi\xi} \theta_\xi}{((r\theta_\xi)^2 + r_\xi^2)^{3/2}} + \frac{\theta_\xi}{((r\theta_\xi)^2 + r_\xi^2)^{1/2}} \quad (21)$$

$$k_2 = k_\phi = \frac{\theta_\xi}{\left((r\theta_\xi)^2 + r_\xi^2\right)^{1/2}} - \frac{r_\xi \cot(\theta)}{r\left((r\theta_\xi)^2 + r_\xi^2\right)^{1/2}} \quad (22)$$

ενώ η μέση καμπυλότητα της διεπιφάνειας είναι  $k_m = \frac{k_1 + k_2}{2}$ .

Οι εφελκυστικές – θλιπτικές τάσεις ασκούνται στο επίπεδο της μεμβράνης. Επειδή θεωρούμε αξονική συμμετρία, οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή των εφελκυστικών – θλιπτικών τάσεων  $\underline{\underline{\tau}}$  συμπίπτουν με  $\vec{t}_1 = \vec{e}_s$  και  $\vec{t}_2 = \vec{e}_\phi$ . Άρα

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tau}} = t_{ss} \vec{e}_s \vec{e}_s + t_{\phi\phi} \vec{e}_\phi \vec{e}_\phi \quad (23)$$

Από την αντικατάσταση των (21), (22) και (23) στην (20) προκύπτει:

$$\Delta F_n = k_s \tau_{ss} + k_\phi \tau_{\phi\phi} \quad (24)$$

Η εξίσωση (24) αποτελεί την εξίσωση ισορροπίας των κάθετων τάσεων που ασκούνται στη μεμβράνη. Όπως αναφέρθηκε, η εξίσωση ισορροπίας των δυνάμεων στην εφαπτομενική διεύθυνση όπως και η εξίσωση ισορροπίας των ροπών δεν λαμβάνονται υπόψη στο παρόν πρόβλημα γιατί αποτελούνται από όρους ανώτερης τάξης που δεν επηρεάζουν σημαντικά το φαινόμενο.

Για την ολοκλήρωση των εξισώσεων που διέπουν τη μεμβράνη θα πρέπει να οριστούν οι κινηματικές και καταστατικές εξισώσεις. Στην περίπτωση αξονικής συμμετρίας οι κινηματικές εξισώσεις είναι [25]:

$$\lambda_s = \frac{S_\xi(t)}{S_\xi(t=0)} \text{ και } \lambda_\phi = \frac{\sigma(t)}{\sigma(t=0)} = \frac{r(t) \sin \theta(t)}{r(t=0) \sin \theta(t=0)}, \quad (25)$$

όπου  $\lambda_s$ ,  $\lambda_\phi$  είναι οι παραμορφώσεις στις κύριες διευθύνσεις. Οι σχέσεις αναφέρονται κάθε χρονική στιγμή στο ίδιο σωματίδιο της διεπιφάνειας, ενώ θεωρείται ότι στην κατάσταση ισορροπίας ( $t=0$ ) η μεμβράνη δεν έχει τάσεις.

Για την καταστατική εξίσωση θα θεωρήσουμε ότι το υλικό παρουσιάζει ελαστική συμπεριφορά και ότι υπακούει στο νόμο Mooney – Rivlin [25]. Τότε προκύπτει ότι οι τάσεις που αναπτύσσονται στη μεμβράνη συνδέονται με τις παραμορφώσεις ως εξής:

$$\begin{aligned}\tau_{ss} &= \frac{E}{3} \frac{1}{\lambda_s \lambda_\phi} \left( \lambda_s^2 - \frac{1}{(\lambda_s \lambda_\phi)^2} \right) \left[ 1 + a(\lambda_\phi^2 - 1) \right] \\ \tau_{\phi\phi} &= \frac{E}{3} \frac{1}{\lambda_s \lambda_\phi} \left( \lambda_\phi^2 - \frac{1}{(\lambda_s \lambda_\phi)^2} \right) \left[ 1 + a(\lambda_s^2 - 1) \right]\end{aligned}\quad (26)$$

όπου  $E = \frac{E_{\text{surf}}}{P^* R_{\text{bal}}} = \frac{3G_s \delta}{\rho_l \omega_f^2 R_{\text{bal}}^3}$  αδιάστατη παράμετρος που φανερώνει πόσο ισχυρές είναι οι

δυνάμεις που προέρχονται από την ελαστικότητα της μεμβράνης σε σχέση με τις αδρανειακές δυνάμεις που προέρχονται από την εφαρμοζόμενη εξωτερική διέγερση και  $0 \leq a \leq 1$  είναι σταθερά που δεικνύει τη μη γραμμικότητα στην συμπεριφορά του υλικού ( $a=0$  γραμμικά ελαστικό υλικό). Στα παραπάνω θεωρείται ότι το υλικό είναι τέτοιο ώστε ο λόγος Poisson

$\nu=0.5$  και ισχύει η σχέση  $G_s = \frac{E_{\text{Vol}}}{2(1+\nu)} = \frac{1}{3} E_{\text{Vol}}$ . Επίσης,  $E_{\text{surf}}$  είναι το επιφανειακό μέτρο

ελαστικότητας και  $E_{\text{surf}} = E_{\text{Vol}} \delta$ , με  $\delta$  το πάχος της μεμβράνης.

Η (18) και (19) στην (17) δίνει την εξίσωση του δυναμικού της διεπιφάνειας:

$$\left. \frac{d\Phi}{dt} \right|_{r_0, \theta_0} = \frac{\left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2}{2} + P_\infty - P_g + \Delta F_n \quad (27)$$

Οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος λόγω αξονικής συμμετρίας θα είναι:

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, N} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0, N} = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n \partial \xi} \right|_{\xi=0, N} = \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0, N} = 0, \quad (28)$$

$$\theta(\xi=0)=0, \theta(\xi=N)=\pi$$

Η πίεση στο εσωτερικό της φουσαλίδας μεταβάλλεται αδιαβατικά, πράγμα που για ιδανικό αέριο σημαίνει ότι:

$$P_G \cdot V^\gamma = P_{g, \text{bal}} \cdot \left( \frac{4 \cdot \pi}{3} \right)^\gamma = P_{st} \cdot \left( \frac{4 \cdot \pi}{3} \right)^\gamma, \quad (29)$$

όπου  $V$ , ο όγκος της φουσαλίδας την χρονική στιγμή  $t$ .

### 3.1.2 Η Ολοκληρωτική Εξίσωση της Διεπιφάνειας της Μικροφυσικής

Για την επίλυση του προβλήματος, χρειάζεται να υπολογισθεί η κάθετη παράγωγος  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  στη διεπιφάνεια της φυσαλίδας. Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται με τη βοήθεια της ολοκληρωτικής αναπαράστασης της εξίσωσης Laplace πάνω στη διεπιφάνεια. Επειδή υποθέσαμε ότι η ροή είναι αστρόβιλη και χωρίς ιξώδες ισχύει η εξίσωση:

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \Phi \quad (30)$$

Επιπλέον, επειδή η ροή εξωτερικά της φυσαλίδας θεωρείται ασυμπίεστη, η εξίσωση της συνέχειας παίρνει τη μορφή:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (31)$$

Η (30) με την (31) δίνει την εξίσωση Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (32)$$

Χρησιμοποιώντας το 2<sup>ο</sup> θεώρημα του Green:

$$\int_D \left( \Phi(\vec{z}) \nabla^2 \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) - \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) \nabla^2 \Phi(\vec{z}) \right) d\nu(\vec{z}) = \int_{\partial D} \left( \Phi(\vec{y}) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\vec{x}, \vec{y}) - \hat{G}(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{y}) \right) dA(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{z} \in D, \quad \vec{y} \in \partial D, \quad (33)$$

όπου  $\Phi$  το δυναμικό,  $\Delta$  η συνάρτηση δέλτα του Dirac και  $\hat{G}, \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}$  οι πυρήνες απλής και διπλής στοιβάδας της εξίσωσης (32) για τους οποίους ισχύει:

$$\nabla^2 \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) + \Delta(\vec{x}, \vec{z}) = 0, \quad \vec{x}, \vec{z} \in D^\infty \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \infty \\ \vec{z} \rightarrow \infty}} \hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) = 0, \quad (34)$$

προκύπτει με χρήση των σχέσεων (32), (33) και (34), η ολοκληρωτική εξίσωση πάνω στη διεπιφάνεια:

$$-\frac{1}{2} \Phi(\vec{x}, t) + \int_A \Phi(\vec{y}, t) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t) = \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{y}, t) \hat{G}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t), \quad \vec{y}, \vec{x} \in A \quad (35)$$

όπου  $A$  η επιφάνεια της φυσαλίδας και  $\vec{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην διεπιφάνεια με φορά προς το εξωτερικό της φυσαλίδας. Ο πυρήνας  $\hat{G}$  υπολογίζεται από την επίλυση της εξίσωσης (34) για τρισδιάστατο χωρίο,

$$\hat{G}(\vec{x}, \vec{z}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|}, \quad \vec{x}, \vec{z} \in D^\infty \quad (36)$$

Στην ολοκληρωτική εξίσωση (35), όταν το σημείο με διάνυσμα θέσης  $\vec{y}$  (source point) τείνει να συμπίπτει στο σημείο με διάνυσμα θέσης  $\vec{x}$  (field point), τότε εμφανίζεται ιδιομορφία στον πυρήνα  $\hat{G}$ , η οποία όμως είναι αδύναμη (weak singularity) και για το λόγο αυτό η ολοκλήρωση είναι εφικτή. Αντίθετα, η ολοκλήρωση που περιέχει τον πυρήνα  $\frac{\partial G}{\partial n}$  είναι εφικτή μόνο υπό την έννοια του Cauchy principal value [28]. Για να άρουμε τη ισχυρή ιδιομορφία (strong singularity) που εμφανίζεται στον πυρήνα  $\frac{\partial G}{\partial n}$ , προσθέτουμε και αφαιρούμε στο πρώτο μέρος της εξίσωσης (35) τον όρο  $\int_A \Phi(\vec{x}, t) \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t)$ . Αν λάβουμε υπόψη ότι:

$$\Phi(\vec{x}, t) \int_A \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t) = -\frac{1}{2} \Phi(\vec{x}, t), \quad (37)$$

η (35) τελικά θα δώσει:

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{y}, t) \hat{G}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t) = -\Phi(\vec{x}, t) + \int_A [\Phi(\vec{y}, t) - \Phi(\vec{x}, t)] \frac{\partial \hat{G}}{\partial n}(\vec{y}, \vec{x}) dA(\vec{y}, t) \quad (38)$$

Επίσης, επειδή έχουμε αξονοσυμμετρικό πρόβλημα το δυναμικό είναι ανεξάρτητο από την γωνία  $\varphi$  και η ολοκλήρωση των πυρήνων θα δώσει:

$$G = \int_0^{2\pi} \hat{G} d\varphi, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \hat{G}}{\partial n} d\varphi \quad (39)$$

Η (38) με την (39) θα δώσουν τελικά:

$$\begin{aligned} & -\Phi(\theta', t) + \int_0^N [\Phi(\theta, t) - \Phi(\theta', t)] \frac{\partial G}{\partial n}(r, r', \theta, \theta') r (r_\xi^2 + (r\theta_\xi)^2)^{1/2} \sin \theta d\xi = \\ & \int_0^N \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\theta, t) G(r, r', \theta, \theta') r (r_\xi^2 + (r\theta_\xi)^2)^{1/2} \sin \theta d\xi \end{aligned} \quad (40)$$

Η εξίσωση (40), που είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ο όρος  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  στην διεπιφάνεια, εφόσον ξέρουμε το δυναμικό πάνω στη διεπιφάνεια. Επειδή ο άγνωστος περιέχεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση Fredholm πρώτου είδους. Για το λόγο αυτό, στην αριθμητική επίλυση θα χρειαστεί να γίνει απ' ευθείας αντιστροφή του πίνακα για την επίλυση του συστήματος που προκύπτει, σε αντίθεση με τις εξισώσεις Fredholm δεύτερου είδους, όπου η επίλυση του συστήματος γίνεται με επαναληπτικό τρόπο.

## 3.2 Η Αριθμητική Επίλυση των Εξισώσεων του Προβλήματος

Λόγω χρήσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης, το πρόβλημα της ροής μεταφέρεται από το τρισδιάστατο χωρίο στην διεπιφάνεια της φυσαλίδας, δηλαδή το πρόβλημα γίνεται από τρισδιάστατο διδιάστατο. Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης της αξονικής συμμετρίας χρειάζεται να διακριτοποιηθεί μόνο η γενέτειρα καμπύλη του σχήματος της μικροφυσαλίδας. Επομένως, η διακριτοποίηση είτε μέσω των πεπερασμένων είτε μέσω των συνοριακών στοιχείων θα είναι σε μία διάσταση.

### 3.2.1 Η Εφαρμογή της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων στην Επίλυση του Προβλήματος

Προσέγγιση με πεπερασμένα στοιχεία εφαρμόστηκε στις κινηματικές εξισώσεις (14) και (15) και στη δυναμική εξίσωση (27). Για την κανονική ολοκλήρωση, η οποία έγινε με τον αλγόριθμο κατά Gauss, χρησιμοποιήθηκαν 4 σημεία ολοκλήρωσης σε κάθε στοιχείο. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε ότι τα αριθμητικά σφάλματα προέρχονται από την παρεμβολή των άγνωστων συναρτήσεων και όχι από την αριθμητική ολοκλήρωση.

Σαν συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιήθηκαν οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines, οι οποίες είναι μη μηδενικές σε τέσσερα στοιχεία και οι οποίες σε κάθε στοιχείο ικανοποιούν τη συνέχεια όχι μόνο οι ίδιες, αλλά και η πρώτη και δεύτερη παράγωγός τους.

Η διακριτοποίηση που εφαρμόστηκε στις εξαρτημένες μεταβλητές είναι:

$$r(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} a_i(t) B_i(\xi), \quad \theta(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} b_i(t) B_i(\xi), \quad \Phi(\xi, t) = \sum_{i=0}^{N+1} c_i(t) B_i(\xi) \quad (41)$$

όπου N ο αριθμός των κόμβων του πλέγματος,  $a_i, b_i, c_i$ , οι συντελεστές των αγνώστων, και  $B_i$  οι συναρτήσεις βάσης. Είναι φανερό ότι, χρησιμοποιούμε δυο επιπλέον κόμβους (fictitious nodes 0 και N+1) για την αναπαράσταση με κυβικές συναρτήσεις B-splines. Οι κόμβοι αυτοί έχουν μόνο μαθηματική σημασία και για τους οποίους θα πρέπει να γράψουμε 2 επιπλέον εξισώσεις για κάθε περίπτωση. Αυτές οι εξισώσεις θα είναι οι συνοριακές συνθήκες (εξισώσεις (28)).

Τελικά προκύπτουν συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\underline{\underline{M_1}} \frac{da}{dt} = \underline{\underline{F_1}}, \quad \underline{\underline{M_2}} \frac{db}{dt} = \underline{\underline{F_2}}, \quad \underline{\underline{M_3}} \frac{dc}{dt} = \underline{\underline{F_3}}, \quad (42)$$

όπου το πρώτο και δεύτερο σύστημα αναφέρονται στις κινηματικές εξισώσεις (14) και (15) και το τρίτο σύστημα στη δυναμική εξίσωση (27). Ο  $\underline{M_1}$  και ο  $\underline{M_2}$  δεν εξαρτώνται από τον χρόνο, ενώ ο  $\underline{M_3}$  μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Τέλος, επειδή οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines καλύπτουν τέσσερα στοιχεία θα δημιουργηθεί πίνακας ζώνης με εύρος ζώνης επτά, ο οποίος απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς για την αντιστροφή του σε σχέση με τα δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange (εύρος ζώνης 5). Το μειονέκτημα αυτό εξισορροπείται από την αύξηση της ακρίβειας, σε σχέση με του δευτέρου βαθμού πολυώνυμα Lagrange, η οποία είναι στην περίπτωση των πρώτων  $O(h^4)$  για την παρεμβολή της άγνωστης συνάρτησης και  $O(h^3)$  για την παρεμβολή της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης, όπου  $h$  το μήκος του στοιχείου [20].

### 3.2.2 Η Εφαρμογή της Μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων στην Επίλυση του Προβλήματος

Η εξίσωση που θα διακριτοποιηθεί με συνοριακά στοιχεία είναι η ολοκληρωτική εξίσωση (40). Η επιπλέον άγνωστη μεταβλητή που θα διακριτοποιηθεί είναι η ταχύτητα των σωματιδίων κάθετα στην διεπιφάνεια:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\theta, t) = \sum_{i=0}^{N+1} d_i(t) B_i(\theta), \quad (43)$$

όπου πάλι σαν συναρτήσεις βάσης χρησιμοποιούνται οι κυβικές συναρτήσεις B-Splines. Αφήνοντας το σημείο του πεδίου  $(F', \theta')$  (field point) να συμπέσει με κάθε ένα από τους  $N$  κόμβους του πλέγματος και ολοκληρώνοντας σε όλα τα στοιχεία ως προς το σημείο πηγής  $(F, \theta)$  (source point), για σταθερό σημείο πεδίου, παίρνουμε  $N$  εξισώσεις. Οι αξονοσυμμετρικοί πυρήνες  $G$  και  $\partial G / \partial n$  είναι σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$G = \frac{K(m)}{\pi \sqrt{a+b}} \quad (44)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n} = n_r \frac{\partial G}{\partial r} + n_\theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \frac{1}{F} = \frac{1}{2F\pi\sqrt{a+b}} \left[ \frac{F'^2 - F^2}{a-b} E(m) - K(m) \right] n_r + \\ \frac{F'}{\pi\sqrt{a+b}} \left[ \frac{4\cos\theta\sin\theta'}{a+b} \frac{dK}{dm} - \frac{\sin(\theta+\theta')}{a-b} E(m) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

όπου,



$$\begin{aligned}
a &= F^2 + F'^2 - 2FF' \cos \theta \cos \theta' \\
b &= 2FF' \sin \theta \sin \theta' \\
m &= \frac{2b}{a+b}
\end{aligned} \tag{46}$$

και  $K(m)$  και  $E(m)$  είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα, τα οποία υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια με την βοήθεια αναπτυγμάτων.[28].

Στην περίπτωση που το σημείο  $(F', \theta')$  (Field Point) τείνει να συμπίσει με το  $(F, \theta)$  (Source Point) η ολοκλήρωση του δεύτερου μέλους της (40) απαιτεί ειδική μεταχείριση λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας που εμφανίζει ο πυρήνας  $G$ , ενώ η ολοκλήρωση του πρώτου μέλους γίνεται με κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις εφαρμόζουμε επίσης κανονική ολοκλήρωση κατά Gauss. Για τη λογαριθμική ολοκλήρωση χρησιμοποιήθηκαν 12 σημεία ολοκλήρωσης, ενώ για την κανονική 4 σημεία ολοκλήρωσης.

Τελικά προκύπτει σύστημα της μορφής:

$$\underline{\underline{G}}^{(N \times N)} \cdot \underline{P}^{(N \times 1)} = \underline{\underline{K}}^{(N \times N)} \cdot \underline{F}^{(N \times 1)}, \tag{47}$$

όπου  $P$  είναι το διάνυσμα που περιέχει τις γνωστές τιμές του δυναμικού σε κάθε κόμβο, και  $F$  το διάνυσμα που περιέχει τους άγνωστους συντελεστές  $d_i$  του  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ . Πρέπει ακόμα να σημειωθεί ότι χρησιμοποιήθηκαν οι συνοριακές συνθήκες (28), που ισχύουν λόγω αξονικής συμμετρίας και οι οποίες μειώνουν σε  $N$  τον αριθμό των άγνωστων συντελεστών  $d_i$ .

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι οι πίνακες που προκύπτουν είναι πλήρεις, σε αντίθεση με αυτούς που δημιουργούνται με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων οι οποίοι έχουν μορφή ζώνης. Το γεγονός αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, τόσο η κατασκευή του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$ , όσο και η αντιστροφή του να είναι πολύ χρονοβόρες διαδικασίες, σε σχέση με τα πεπερασμένα στοιχεία. Χρησιμοποιώντας ωστόσο 100 στοιχεία για τη διακριτοποίηση της διεπιφάνειας προέκυψε ότι η κατασκευή του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$  είναι περίπου 10 φορές πιο χρονοβόρα διαδικασία απ' ό,τι η αντιστροφή του. Για το λόγο αυτό έγινε παραλληλισμός της κατασκευής του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$  χρησιμοποιώντας το πρωτόκολλο επικοινωνίας MPI. Περαιτέρω, βελτιστοποίηση μπορεί να γίνει με την παράλληλη αντιστροφή του πίνακα  $\underline{\underline{K}}$ .

### 3.2.3 Η Χρονική Ολοκλήρωση των Εξισώσεων

Επειδή τα συστήματα (42) που προκύπτουν από την εφαρμογή των πεπερασμένων στοιχείων είναι συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, θα πρέπει να ολοκληρωθούν στο χρόνο ώστε να υπολογισθούν οι άγνωστοι συντελεστές. Η καλύτερη μέθοδος για το σκοπό αυτό έχει βρεθεί ότι είναι η ρητή μέθοδος Runge-Kutta τέταρτης τάξης, η οποία έχει ακρίβεια  $O(dt^4)$ , όπου  $dt$  το χρονικό βήμα [28]. Ωστόσο, για να είναι ευσταθής η μέθοδος θα πρέπει, για δεδομένη χωρική διακριτοποίηση, το χρονικό βήμα να είναι μικρότερο από κάποια δεδομένη τιμή.

### 3.2.4 Η Χρήση Φίλτρων

Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι όταν μια μεμβράνη δεν έχει αντίσταση σε κάμψη, τότε μόλις εμφανιστούν θλιπτικές τάσεις επέρχεται λυγισμός της μεμβράνης. Αριθμητικά, ο λυγισμός αυτός εμφανίζεται με αστάθεια πολύ μικρού μήκους κύματος (της τάξης του μήκους του στοιχείου). Είναι δυνατό να εξαφανίσουμε αυτή την αστάθεια με χρήση βαθυπερατών φίλτρων στις εξισώσεις, τα οποία επιδρούν μόνο στις υψηλές χωρικές συχνότητες. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να συνεχιστεί η εξέλιξη του φαινομένου και να παρατηρηθούν ενδιαφέροντα φαινόμενα αλληλεπίδρασης ρευστού – στερεού. Ωστόσο, η χρήση των φίλτρων πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή και πάντα με τον έλεγχο της διατήρησης της ενέργειας του συστήματος, ώστε να αποφεύγονται λύσεις που δεν είναι πραγματικές.

Το φίλτρο που χρησιμοποιήθηκε έχει την μορφή [29]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^4 Q}{\partial \xi^4} \quad (48)$$

όπου  $Q$  φανερώνει τη μεταβλητή στην οποία εφαρμόζεται το φίλτρο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το φίλτρο εφαρμόστηκε σε όλες τις εξαρτώμενες μεταβλητές  $r(\xi, t)$ ,  $\theta(\xi, t)$ ,  $\Phi(\xi, t)$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi, t)$ . Το αριθμητικό σχήμα που χρησιμοποιήθηκε για τη διακριτοποίηση της (48) είναι το ρητό σχήμα δεύτερης τάξης για την παραγωγή ως προς  $\xi$  και πρώτης τάξης ως προς τον χρόνο:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta \xi^4} (Q_{j+2}^n - 4Q_{j+1}^n + 6Q_j^n - 4Q_{j-1}^n + Q_{j-2}^n) \quad (49)$$

όπου το  $\lambda$  παίρνει τιμές στο διάστημα:  $-3 \cdot 10^{-5} \leq \lambda \leq -7 \cdot 10^{-5}$ .

### 3.2.5 Ο Αλγόριθμος Επίλυσης του Προβλήματος

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση του προβλήματος της φουσαλίδας είναι ο εξής:

- i. Την χρονική στιγμή  $t=0$  θεωρούμε ότι η πίεση στο άπειρο διαταράσσεται σύμφωνα με την εξίσωση (5), ενώ θεωρούμε ότι τόσο το δυναμικό  $\Phi$ , όσο και η ταχύτητα  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  είναι μηδέν.
- ii. Έναρξη της χρονικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο Runge-Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης.
- iii. Σύγκριση του μικρότερου μήκους τόξου με το αντίστοιχο ισοκατανεμημένο και ανακατανομή των σωματιδίων της διεπιφάνειας, εφόσον το πρώτο είναι αρκετά μικρότερο από το δεύτερο.
- iv. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στις σχέσεις (14), (15) και (27) και υπολογίζουμε την καινούρια θέση της διεπιφάνειας  $r, \theta$ , καθώς και το δυναμικό  $\Phi$ .
- v. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων στην ολοκληρωτική εξίσωση (40) και με δεδομένο πλέον το δυναμικό  $\Phi$  στη διεπιφάνεια υπολογίζουμε την ταχύτητα  $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$  κάθετα στη διεπιφάνεια.
- vi. Εφόσον ξέρουμε την καινούρια θέση της διεπιφάνειας, υπολογίζουμε τον καινούργιο όγκο της φουσαλίδας.
- vii. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (29), η οποία δηλώνει την αδιαβατική συμπίεση της φουσαλίδας, υπολογίζουμε την καινούρια πίεση στο εσωτερικό της φουσαλίδας.
- viii. Εφαρμόζουμε φίλτρο σύμφωνα με την εξίσωση (49) στις εξαρτημένες μεταβλητές  $r(\xi, t), \theta(\xi, t), \Phi(\xi, t), \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi, t)$ .
- ix. Ο αλγόριθμος επιστρέφει στο βήμα (iii) με νέα δεδομένα για την πίεση στο εσωτερικό της φουσαλίδας, τη θέση της διεπιφάνειας, το δυναμικό και την ταχύτητα και η επίλυση προχωράει στον χρόνο.

### 3.3 Γραμμικοποίηση του Προβλήματος

Μία από τις δοκιμές που απαιτούνται προκειμένου να πιστοποιηθεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων του αριθμητικού κώδικα, είναι η σύγκριση της ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης της μικροφυσαλίδας που προκύπτει από την αριθμητική επίλυση του προβλήματος με αυτήν που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Για αυτόν τον λόγο θα πρέπει να γραμμικοποιηθούν οι μη γραμμικές εξισώσεις του προβλήματος (14), (15) και (27).

Οι παραμορφώσεις στις κύριες διευθύνσεις, σχέσεις (25), συνδέονται με τις μετατοπίσεις  $w$  και  $u$  της διεπιφάνειας κατά την ακτινική και γωνιακή διεύθυνση αντίστοιχα ως [22]:

$$\lambda_s = 1 + \frac{u_\theta + w}{r}, \lambda_\phi = 1 + \frac{u \cos \theta}{r \sin \theta} + \frac{w}{r} \quad (50)$$

Θεωρούμε μικρές διαταραχές στην βασική λύση, δηλαδή στην κατάσταση ισορροπίας της μικροφυσαλίδας:

$$R = 1 + \varepsilon w$$

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon u \quad \text{με } \varepsilon \ll 1. \text{ Διατηρώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης ως προς } \varepsilon, \text{ οι}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1$$

εξισώσεις (14), (15) και (27) δίνουν αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &\approx \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=1}, \quad (a) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &\approx \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{r=1}, \quad (b) \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{r=1} &\approx \frac{3}{2} P_\infty \gamma \int_0^\pi w \sin \theta d\theta + 2E(u_\theta + 2w + u \cot \theta), \quad (c) \end{aligned} \quad (51)$$

Παραγωγή της (51-b) ως προς  $\theta$  και της (51-c) ως προς  $t$  και αντικατάσταση σε αυτήν των (51-a, 51-b) δίνει:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{r=1} \approx \frac{3}{2} P_\infty \gamma \int_0^\pi \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=1} \sin \theta d\theta + 2E \left( \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right|_{r=1} + 2 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=1} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right|_{r=1} \cot \theta \right) \quad (52)$$

Το δυναμικό της ταχύτητας ικανοποιεί την Λαπλασιανή, λόγω του ότι το πεδίο ταχυτήτων είναι αστρόβιλο, η οποία για σφαιρικές συντεταγμένες επιδέχεται λύσης της μορφής:

$$\Phi(r, \theta, t) = e^{i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{r^{k+1}} P_k(\theta) \quad (53)$$

Με αντικατάσταση της (53) στην (52) και αναζητώντας μη μηδενικές λύσεις προκύπτουν οι παρακάτω ιδιοσυχνότητες:

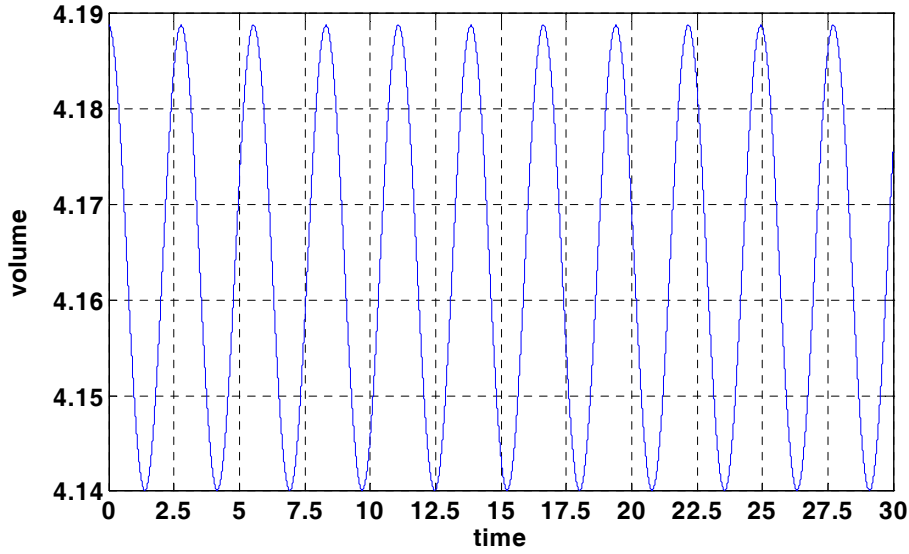
$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{3P_\infty \gamma + 4E}, \\ \omega_k &= \sqrt{2E(k+1)(k+2)}, \quad k=1,2,\dots,\infty\end{aligned}\tag{54}$$

οι οποίες χαρακτηρίζουν τις ελεύθερες ταλαντώσεις της μικροφουσαλίδας.

### 3.4 Αποτελέσματα και Συμπεράσματα για το Πρόβλημα της Δυναμικής της Ταλάντωσης και της Κατάρρευσης της Μικροφουσαλίδας

Οι προσομοιώσεις που έγιναν αφορούν μικροφουσαλίδα με ακτίνα ισορροπίας  $R_{bal} = 1.5 \mu m$  και η οποία έχει μεμβράνη με πάχος  $\delta = 15 nm$ , μέτρο διάτμησης  $G_s = 18 MPa$  και συντελεστή μη γραμμικότητας  $\alpha=0.5$ . Η στατική πίεση του εξωτερικού ρευστού στην ισορροπία θεωρήθηκε ότι είναι  $P_{st} = 1 atm$ , η διαταραχή της  $\varepsilon_{inf} = 12$ , ενώ η συχνότητα της καθορίστηκε στα  $\nu_f = 2.4 MHz$ . Το εξωτερικό ρευστό θεωρείται ότι είναι το νερό με πυκνότητα  $\rho_l = 998 \frac{Kg}{m^3}$  και το εσωτερικό ρευστό ότι είναι ιδανικό αέριο με  $\gamma = 1.4$ . Οι τιμές των παραμέτρων επιλέχθηκαν έτσι ώστε να προσομοιωθεί όσο καλύτερα γίνεται το πείραμα κατάρρευσης μικροφουσαλίδας από τους James E.Chomas et al [9]. Όπως αναφέρεται στην παραπάνω εργασία η ακτίνα της μικροφουσαλίδας πριν την κατάρρευσή της φτάνει στο τριπλάσιο της ακτίνας της κατάστασης ισορροπίας. Η πληροφορία αυτή χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί η τιμή του μέτρου ελαστικότητας της μεμβράνης, για δεδομένο πάχος  $\delta$  και συντελεστή  $\alpha$ .

Πριν την προσομοίωση της μικροφουσαλίδας σε πολύ μεγάλες διαταραχές και την απ' ευθείας σύγκριση με τα πειραματικά αποτελέσματα, επιβάλλεται να γίνουν διάφορες δοκιμές για την πιστοποίηση της ορθότητας των αποτελεσμάτων του αριθμητικού σχήματος. Μία από τις δοκιμές αυτές είναι η σύγκριση της ιδιοσυχνότητας της ταλάντωσης της μικροφουσαλίδας, όταν εφαρμοσθεί μικρή βηματική διαταραχή της πίεσης, με αυτή που προβλέπει η γραμμική θεωρία.



**Σχήμα 2.** Ο όγκος της μικροφουσαλίδας σε συνάρτηση του χρόνου για γραμμική διαταραχή. Δεδομένα προσομοίωσης:  $R_{bal}=1.5 \mu m$ ,  $G_s=18 \text{ MPa}$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\delta=15 \text{ nm}$ ,  $\rho_l=998 \text{ kg/m}^3$ ,  $P_{st}=1 \text{ atm}$ ,  $\nu_f=2.4 \text{ MHz}$ ,  $\varepsilon_{inf}=0.05$ ,  $\gamma=1.4$ , αριθμός στοιχείων 60.

Στο σχήμα 2 φαίνεται η εξάρτηση του όγκου της μικροφουσαλίδας από το χρόνο για βηματική διαταραχή της πίεσης,  $\varepsilon_{inf} = 0.05$ . Από το σχήμα φαίνεται ότι η περίοδος ταλάντωσης της μικροφουσαλίδας είναι  $T_0 = 2.78$  και συμπίπτει με αυτή που δίνει η γραμμική θεωρία (σχέση 54).

Μια άλλη δοκιμή που εξασφαλίζει την ορθότητα των αριθμητικών αποτελεσμάτων ανεξάρτητα από το μέγεθος της εξωτερικής διαταραχής, είναι η διατήρηση της συνολικής ενέργειας του συστήματος. Για να παράγουμε την ολοκληρωτική εξίσωση της ενέργειας του συστήματος ξεκινάμε από την εξίσωση:

$$\iiint_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} \nabla^2 \Phi dV = 0 \quad (55)$$

και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA - \frac{1}{2} \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [(\vec{\nabla} \Phi)^2] dV = 0 \quad (56)$$

Αν εφαρμόσουμε το ολοκληρωτικό θεώρημα του Reynolds στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

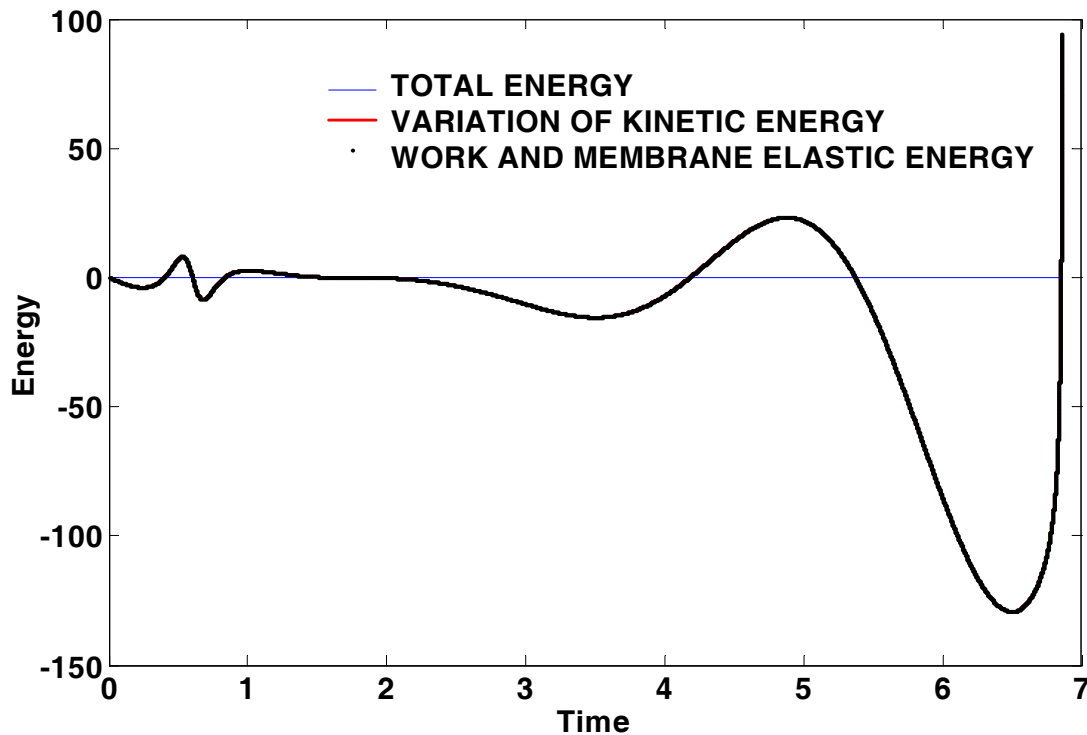
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \iiint_V (\vec{\nabla} \Phi)^2 dV \right] = \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \frac{1}{2} \iint_A (\vec{\nabla} \Phi)^2 \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \quad (57)$$

ενώ κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέλη στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (57) και εισάγοντας τη δυναμική εξίσωση της διεπιφάνειας (27) λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \iint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA \right] - \iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial n} (-P_g + P_\infty + \Delta F_n) dA = 0 \quad (58)$$

η οποία φανερώνει ουσιαστικά ότι η συνολική ενέργεια του συστήματος δε μεταβάλλεται αλλά εναλλάσσεται ανάμεσα σε κινητική, ενέργεια λόγω ελαστικότητας της μεμβράνης και σε έργο μεταβολής όγκου.

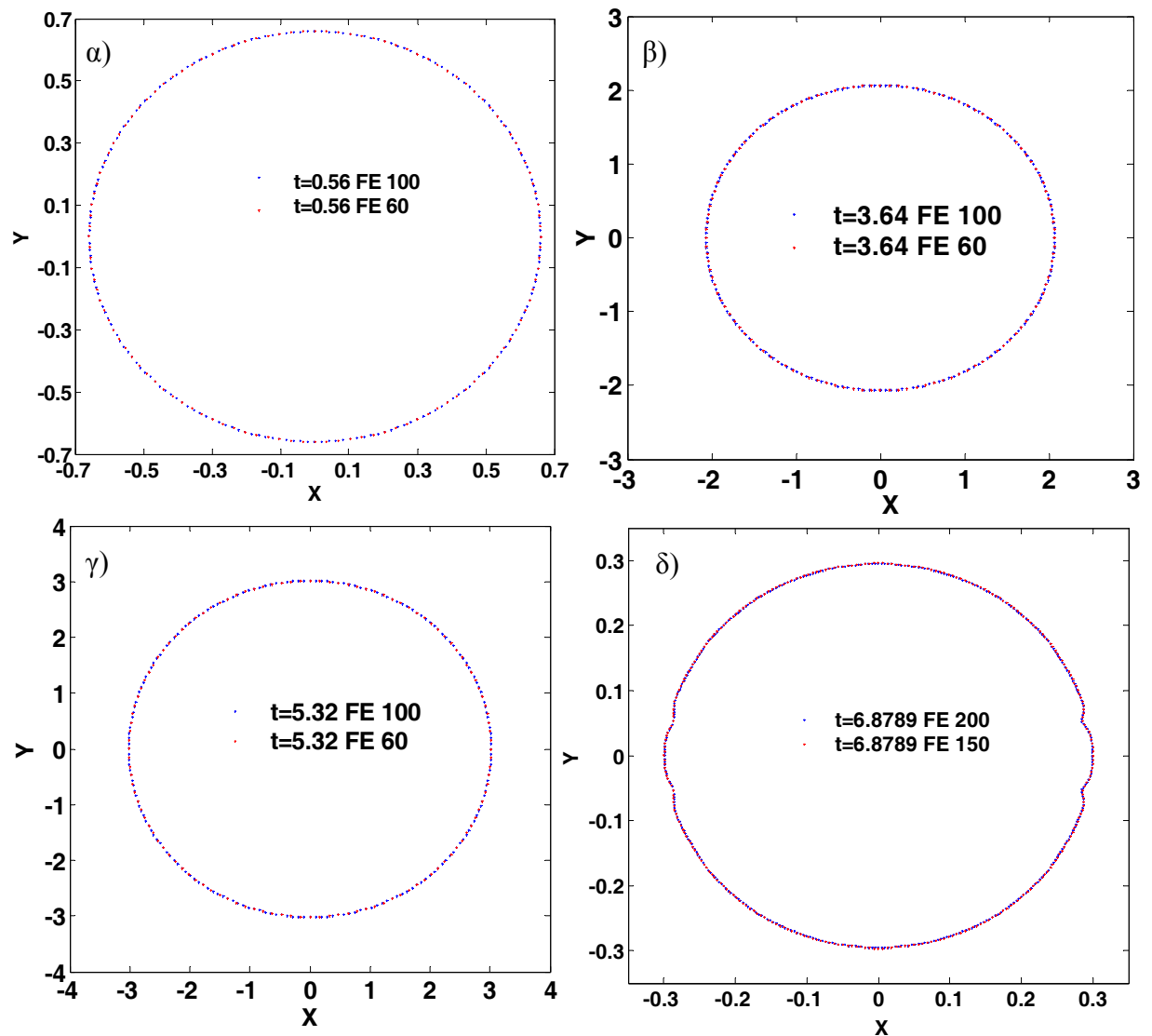
Στο σχήμα 3 φαίνεται κάθε χρονική στιγμή η χρονική μεταβολή του πρώτου ολοκληρώματος της σχέσης (58), το δεύτερο ολοκλήρωμα και η διαφορά τους, η οποία θα πρέπει να είναι μηδέν. Είναι φανερό ότι η σχέση (58) ικανοποιείται κάθε χρονική στιγμή, γεγονός που δείχνει την ορθότητα των αριθμητικών υπολογισμών.



**Σχήμα 3.** Η συνολική ενέργεια της μικροφουσαλίδας συναρτήσει του χρόνου. Δεδομένα προσομοίωσης:  $R_{bal}=1.5 \mu m$ ,  $G_s=18 MPa$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\delta=15 nm$ ,  $\rho_l=998 kg/m^3$ ,  $P_{st}=1 atm$ ,  $v_f=2.4 MHz$ ,  $\epsilon_{inf}=12$ ,  $\gamma=1.4$ , αριθμός στοιχείων 100.

Ακόμα, μία άλλη απόδειξη της ορθότητας των υπολογισμών αποτελεί και η ανεξαρτησία της λύσης με την πυκνωση του πλέγματος. Στο σχήμα 4 εμφανίζονται σε διάφορες χρονικές στιγμές σχήματα της μικροφουσαλίδας για 60 και 100 στοιχεία. Είναι φανερό ότι η λύση είναι

παρόμοια γεγονός που φανερώνει τη σύγκλιση της αριθμητικής λύσης. Πρέπει να επισημανθεί όμως ότι στα τελευταία στάδια της κατάρρευσης στα οποία η μικροφουσαλίδα παραμορφώνεται, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν περισσότερα στοιχεία για να λάβουμε τη σωστή λύση. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 4-δ όπου έχουν χρησιμοποιηθεί 150 και 200 στοιχεία, για την απόδειξη της ορθότητας της λύσης.

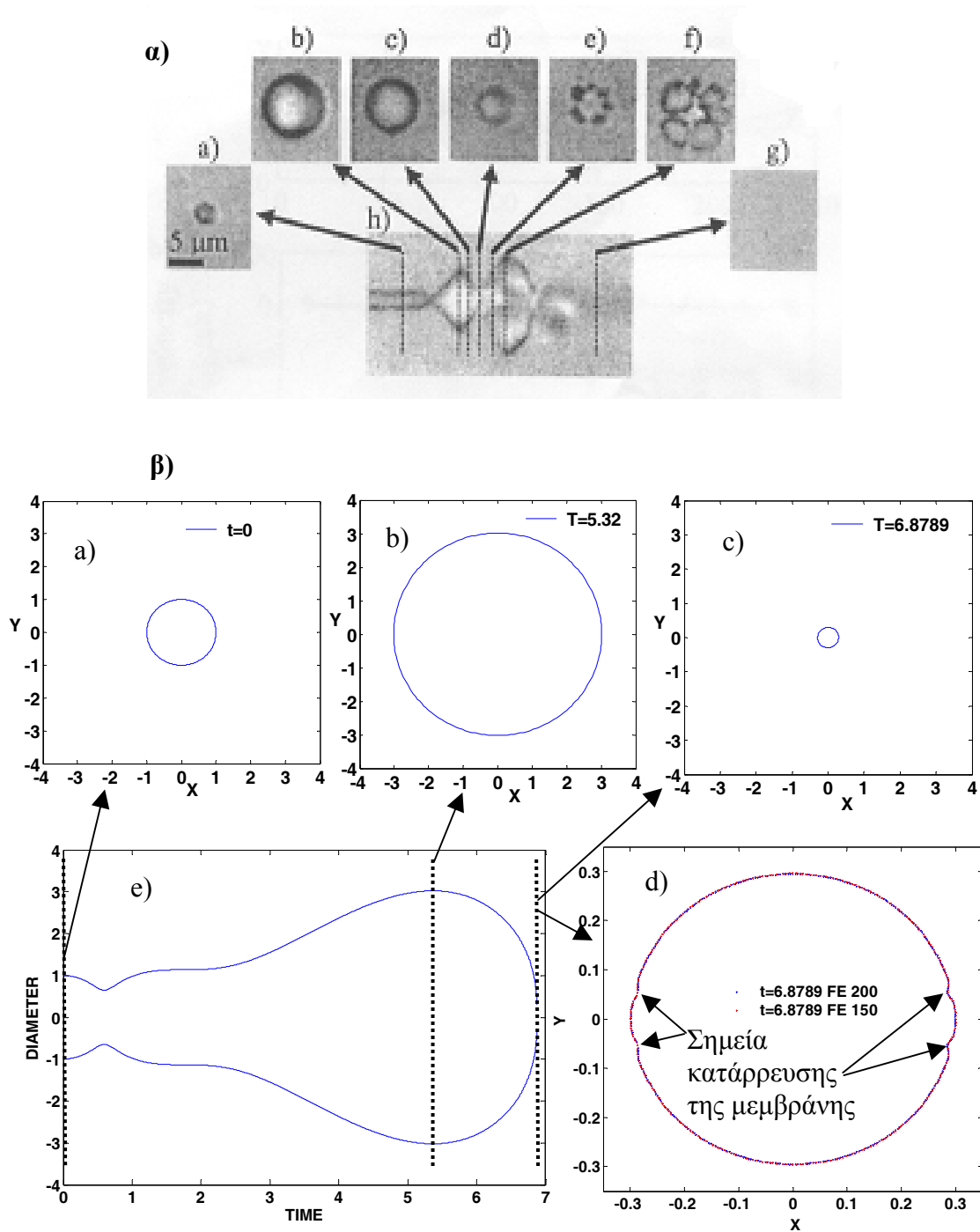


**Σχήμα 4.** Η ανεξαρτησία της λύσης με την πυκνωση του πλέγματος. Δεδομένα προσομοίωσης:  $R_{bal}=1.5 \mu m$ ,  $G_s=18 \text{ MPa}$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\delta=15 \text{ nm}$ ,  $\rho_l=998 \text{ kg/m}^3$ ,  $P_{st}=1 \text{ atm}$ ,  $v_f=2.4 \text{ MHz}$ ,  $\epsilon_{inf}=12$ ,  $\gamma=1.4$ .

Τέλος, η απ' ευθείας σύγκριση με πειραματικά αποτελέσματα φανερώνει κατά πόσο το μοντέλο προσεγγίζει την πραγματικότητα. Στο σχήμα 5α φαίνονται διαδοχικές εικόνες της δυναμικής συμπεριφοράς της μικροφουσαλίδας, όπως αυτές προέκυψαν από το πείραμα των



Chomas et al [9], καθώς και η εξέλιξη της διαμέτρου της μικροφυσαλίδας με το χρόνο. Στο σχήμα 5β φαίνονται αντίστοιχα σχήματα από την προσομοίωση με το παρόν μοντέλο.



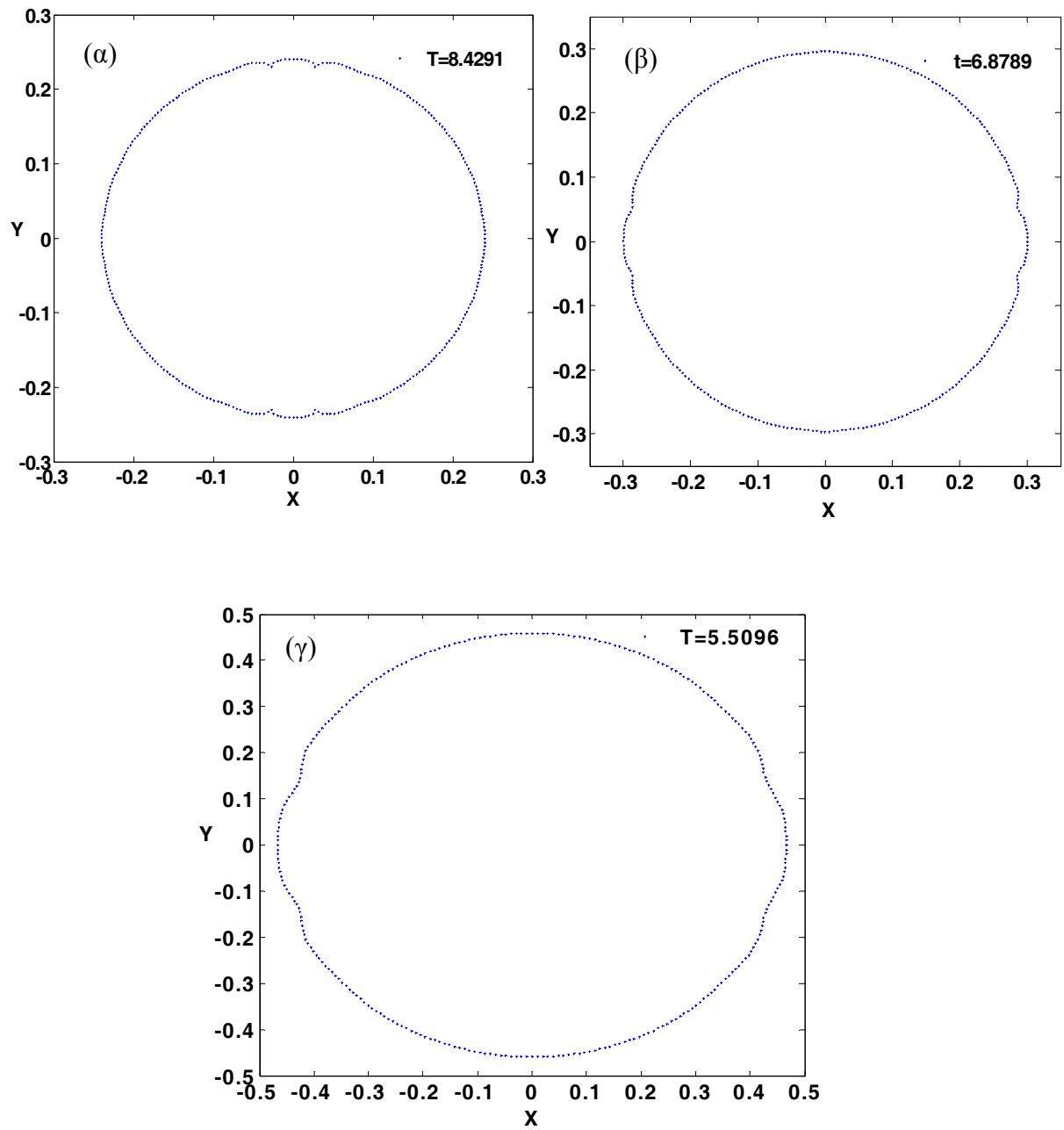
**Σχήμα 5.** Η δυναμική συμπεριφορά της μικροφυσαλίδας και ο τρόπος κατάρρευσης της α) πειραματικά αποτελέσματα από τους James E.Chomas et al. β) αριθμητική προσομοίωση. Δεδομένα προσομοίωσης:  $R_{bal}=1.5 \mu m$ ,  $G_s=18 \text{ MPa}$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\delta=15 \text{ nm}$ ,  $\rho_l=998 \text{ kg/m}^3$ ,  $P_{st}=1 \text{ atm}$ ,  $\nu_f=2.4 \text{ MHz}$ ,  $\epsilon_{int}=12$ ,  $\gamma=1.4$ .

Παρατηρείται ότι η δυναμική συμπεριφορά της μικροφυσαλίδας όπως προκύπτει από την προσομοίωση είναι παρόμοια με αυτή του πειράματος, ενώ ο τρόπος κατάρρευσης είναι παρόμοιος. Η αριθμητική προσομοίωση αποδεικνύει ότι η μικροφυσαλίδα καταρρέει σε τέσσερις ελεύθερες φυσαλίδες, ενώ το πείραμα σε πέντε. Ένας παράγοντας που εικάζεται ότι παίζει ρόλο είναι η αρχική ασυμμετρία της μικροφυσαλίδας σε συνάρτηση με τις παραμένουσες τάσεις στη μεμβράνη. Επίσης, παρατηρείται ότι η μικροφυσαλίδα καταρρέει πάντα στην περίοδο της συμπίεσης της πράγμα που φανερώνει ότι η κατάρρευση της οφείλεται στην αστάθεια λυγισμού της μεμβράνης και όχι στην αστάθεια Rayleigh – Taylor.

Επίσης, όπως φαίνεται στο σχήμα 6, ο τελικός τρόπος κατάρρευσης εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού. Όσο πιο μεγάλο είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού τόσο τείνουν να εμφανιστούν ιδιομορφές με μεγαλύτερο μήκος κύματος. Αυτό κατά πάσα πιθανότητα έχει να κάνει με την σταθεροποιητική δράση της ελαστικότητας η οποία δρα περίπου σαν την επιφανειακή τάση ελλείψει αντίστασης σε λυγισμό. Η παράμετρος αυτή συνδέει τις ροπές με τις παραμορφώσεις στη μεμβράνη και έχει γενικά τη μορφή:

$$M = D \cdot \Delta K, \quad (59)$$

όπου  $M$  είναι οι ροπές που αναπτύσσονται στη μεμβράνη,  $\Delta K$  είναι η μεταβολή της καμπυλότητας που δημιουργούν οι ροπές και  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  η αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη, για τρισδιάστατο ελαστικό στερεό πάχους  $h$  [18]. Για δεδομένη αναπτυσσόμενη ροπή στη μεμβράνη, όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη ή ισοδύναμα όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο ελαστικότητας της μεμβράνης, τόσο μικρότερη θα είναι η μεταβολή της καμπυλότητας που θα πάθει η μεμβράνη. Αυτό μεταφράζεται σε ιδιομορφές με μεγαλύτερο μήκος κύματος. Για τον ίδιο λόγο, όταν η αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη είναι μηδέν θα πρέπει η μεταβολή της καμπυλότητας να γίνει άπειρη. Αριθμητικά αυτό εμφανίζεται με αστάθεια πολύ μικρού μήκους κύματος (του μήκους του στοιχείου). Η συμπεριφορά αυτή οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν συμπεριληφθεί στο μοντέλο η αντίσταση σε λυγισμό τότε θα αποφευχθεί με φυσικό τρόπο η εμφάνιση ασταθειών μικρού μήκους κύματος οι οποίες έτσι θα σταθεροποιηθούν.



**Σχήμα 6.** Ο τρόπος κατάρρευσης της μικροφουσαλίδας για α)  $G_s=5$  MPa, β)  $G_s=18$  MPa γ)  $G_s=50$  MPa. Δεδομένα προσομοιώσεων:  $R_{bal}=1.5$   $\mu\text{m}$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $\delta=15$  nm,  $\rho_l=998$  kg/m<sup>3</sup>,  $P_{st}=1$  atm,  $\nu_f=2.4$  MHz,  $\epsilon_{inf}=12$ ,  $\gamma=1.4$ , αριθμός στοιχείων 150.

Από το σχήμα 6 φαίνεται ακόμα ότι το μέτρο ελαστικότητας επηρεάζει τη θέση στη διεπιφάνεια όπου θα εμφανιστεί αστάθεια λυγισμού της μεμβράνης. Πάνω από μία τιμή του μέτρου διάτμησης, αστάθεια εμφανίζεται κοντά στον άξονα συμμετρίας(σχήματα β-γ), ενώ

κάτω από την παραπάνω τιμή η αστάθεια εμφανίζεται μακριά από τους πόλους. Στην τελευταία περίπτωση πρέπει να γίνουν και άλλες προσομοιώσεις για να επαληθευτεί το αποτέλεσμα αυτό. Πρέπει ακόμα να επισημανθεί ότι κάτω από μία τιμή του μέτρου ελαστικότητας θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και οι όροι της επιφανειακής τάσης που γίνονται ίδιας τάξης μεγέθους με αυτόν της ελαστικότητας και επομένως επηρεάζουν σημαντικά τη δυναμική της ταλάντωσης και τον τρόπο κατάρρευσης της μικροφυσαλίδας.

Τέλος, επισημαίνεται ότι η μεμβράνη της μικροφυσαλίδας είναι δυνατό να σχιστεί, όταν ασκούνται εφελκυστικές τάσεις στη μεμβράνη. Αυτή θα καταρρεύσει στα σημεία όπου οι εφελκυστικές τάσεις θα έχουν περάσει το όριο ροής του υλικού (αμελητέα πλαστική περιοχή). Στην παραπάνω ανάλυση θεωρήθηκε ότι το όριο ροής του υλικού είναι τέτοιο, ώστε η μεμβράνη να μη σχίζεται λόγω των εφελκυστικών τάσεων που ασκούνται στη μεμβράνη κατά τη διαστολή της μικροφυσαλίδας.

## Κεφάλαιο 4 Συμπεράσματα και Προτάσεις

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία μελετήθηκαν οι σφαιροσυμμετρικές και αξονοσυμμετρικές ταλαντώσεις μικροφυσαλίδας με ελαστική μεμβράνη (contrast agent), όταν αυτή υπόκειται σε ακουστικές διαταραχές της πίεσης στο άπειρο. Το σφαιροσυμμετρικό μοντέλο βασίστηκε στην εξίσωση των Keller – Miksis [24], που ισχύει για σφαιρικές ταλαντώσεις ελεύθερων φυσαλίδων όταν λαμβάνονται υπόψη τόσο η συμπιεστότητα του ρευστού στο οποίο βρίσκονται όσο και το ιξώδες του. Για τη μοντελοποίηση της ελαστικότητας της μεμβράνης χρησιμοποιήθηκε ο γραμμικός νόμος του Hooke μεταξύ τάσεων - παραμορφώσεων, ενώ η διαταραχή της πίεσης στο άπειρο θεωρήθηκε ότι έχει ημιτονοειδής μορφή.

Τα αποτελέσματα συμφωνούν σε μεγάλο βαθμό με τα πειραματικά. Όπως αποδείχτηκε από την παραμετρική μελέτη τα χαρακτηριστικά της μεμβράνης παίζουν σημαντικό ρόλο στην απόκριση της φυσαλίδας, όπως και το μέγεθος της μικροφυσαλίδας και το μέσο στο οποίο βρίσκεται. Πιο συγκεκριμένα:

- Αύξηση της εξωτερικής διαταραχής έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της συνεισφοράς των υψηλότερων αρμονικών στο συνολικό  $\sigma_{Sc,n}$ , ενώ η συχνότητα συντονισμού δε μεταβάλλεται.
- Αύξηση του πάχους της μεμβράνης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της συχνότητας συντονισμού, ενώ μειώνεται η συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο συνολικό  $\sigma_{Sc,n}$ , το οποίο μειώνεται.
- Αύξηση του μέτρου διάτμησης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της συχνότητας συντονισμού, ενώ μειώνεται η συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο συνολικό  $\sigma_{Sc,n}$ , το οποίο αυξάνεται.
- Αύξηση του ιξώδους της μεμβράνης έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της συχνότητας συντονισμού, ενώ μειώνεται η συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο συνολικό  $\sigma_{Sc,n}$ , το οποίο μειώνεται. Η αύξηση της συχνότητας συντονισμού δεν είναι τόσο σημαντική όσο αυτή που επιτυγχάνεται με αύξηση του πάχους της μεμβράνης ή του μέτρου διάτμησης

- Αύξηση του μεγέθους της μικροφυσαλίδας έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της συχνότητας συντονισμού, ενώ αυξάνεται η συνεισφορά των υψηλότερων αρμονικών στο συνολικό  $\sigma_{Sc,n}$ , το οποίο αυξάνεται.
- Η επίδραση του μέσου στο οποίο βρίσκεται η μικροφυσαλίδα φαίνεται ότι επηρεάζει κυρίως το  $\sigma_{Sc,n}$  της και όχι τη συχνότητα συντονισμού. Όσο αυξάνεται η συμπίεστικότητα και το ιξώδες του μέσου στο οποίο εφαρμόζονται οι διαταραχές, τόσο μειώνεται το  $\sigma_{Sc,n}$  όλων των αρμονικών.
- Οι παραμένουσες τάσεις στη μεμβράνη φάνηκε ότι δεν επηρεάζουν σημαντικά την απόκριση της μικροφυσαλίδας, όταν χρησιμοποιείται ο γραμμικός νόμος του Hooke.
- Οι ελεύθερες φυσαλίδες εμφανίζουν πολύ πιο πλούσιο φάσμα συχνοτήτων απ' ότι οι μικροφυσαλίδες (Contrast Agents) για το ίδιο μέγεθος διαταραχής, ενώ και ο συντονισμός τους επέρχεται σε πιο χαμηλές συχνότητες. Επίσης, η απόδοση στο  $\sigma_{Sc,n}$  της ελεύθερης φυσαλίδας είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή του Contrast Agent.

Από πειραματικές μετρήσεις ωστόσο, παρατηρούνται διάφορα φαινόμενα τα όποια φανερώνουν ότι το υλικό της μεμβράνης χαρακτηρίζεται από μη γραμμική σχέση τάσεων – παραμορφώσεων. Έτσι, για παράδειγμα έχει παρατηρηθεί ότι οι μικροφυσαλίδες αρχίζουν να ταλαντώνονται πάνω από ένα όριο διαταραχής της πίεσης, γεγονός που οφείλεται μάλλον στις παραμένουσες τάσεις σε συνδυασμό με τη μη γραμμική ελαστικότητα της μεμβράνης. Η ασυμφωνία επίσης μεταξύ του μοντέλου και πειραματικών αποτελεσμάτων μπορεί να οφείλεται σε κάποιο βαθμό στον ίδιο λόγο. Επομένως προτείνεται το παραπάνω μοντέλο να επεκταθεί και να χρησιμοποιηθεί μη γραμμικός νόμος μεταξύ τάσεων – παραμορφώσεων.

Επιπλέον, η μορφή της διαταραχής θα μπορούσε να επεκταθεί, ώστε να περιλαμβάνει όχι μόνο μια συχνότητα αλλά ένα εύρος συχνοτήτων, όπως συμβαίνει στα πειράματα. Επίσης, διεξάγεται έρευνα που αφορά την αύξηση της απόκρισης της μικροφυσαλίδας ( $\sigma_{Sc,n}$ ), όταν αυτή διαταραχθεί αρχικά με μία συχνότητα και ύστερα από μία ορισμένη φάση με μία διαφορετική συχνότητα [30].

Το αξονοσυμμετρικό μοντέλο φανέρωσε τη δυναμική της μικροφυσαλίδας και υπέδειξε τον τρόπο κατάρρευσης της. Το επιφανειακό μέτρο ελαστικότητας της μεμβράνης φαίνεται ότι επηρεάζει τον τρόπο κατάρρευσης της μεμβράνης. Αύξηση του μέτρου ελαστικότητας έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του μήκους κύματος της αστάθειας λυγισμού. Τα αποτελέσματα συμφωνούν σε κάποιο βαθμό με τα πειραματικά, πρέπει ωστόσο να εισαχθεί στο μοντέλο η αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη ώστε μια φυσική παράμετρος να αποτρέψει την ανάπτυξη ασταθειών μικρού μήκους κύματος και να αποφευχθεί η χρήση φίλτρου. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το ότι, σύμφωνα με τις αριθμητικές προσομοιώσεις, η θραύση της μικροφυσαλίδας γίνεται πάντα στην φάση συμπίεσης γεγονός που παραπέμπει στην αστάθεια λυγισμού ελαστικών κελυφών και όχι στην αστάθεια τύπου Rayleigh-Taylor όπως προτάθηκε από τους Chomas et al. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι η εισαγωγή της αντίστασης σε κάμψη αυξάνει τον υπολογιστικό χρόνο επίλυσης του προβλήματος, εξαιτίας της σημαντικής μείωσης του χρονικού βήματος που απαιτείται για την επίτευξη λύσης όσο αυξάνεται η αντίσταση της μεμβράνης σε κάμψη. Αυτός ο περιορισμός έχει παρατηρηθεί κατά τη μοντελοποίηση κάψουλας και ερυθρών αιμοσφαιρίων [18] και αναμένεται ότι θα εμφανιστεί και στη μοντελοποίηση των contrast agents.

Περαιτέρω, θα πρέπει να διερευνηθεί η επίδραση στη δυναμική και στην κατάρρευση της μικροφυσαλίδας, τόσο της αρχικής ασυμμετρίας, όσο και των παραμενουσών τάσεων στη μεμβράνη. Επίσης, κατά ανάλογο τρόπο προς την εργασία του M. S. Plesset [10] και του Prosperetti [11], είναι δυνατό να γίνει ανάλυση ευστάθειας της σφαιροσυμμετρικής περιοδικής ταλάντωσης μικροφυσαλίδας, όπου θα συμπεριλαμβάνονται η επίδραση της ελαστικότητας, η αντίσταση σε κάμψη της μεμβράνης αλλά και το ιξώδες του περιβάλλοντος μέσου. Με τον τρόπο αυτό θα προβλεφθεί ο επικρατέστερος μηχανισμός κατάρρευσης, Rayleigh-Taylor, λυγισμός ή κάποιος άλλος αναλόγως των τιμών που λαμβάνουν οι παράμετροι του προβλήματος, ώστε να γίνει απ' ευθείας σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με μια αναλυτική λύση. Τέλος, η χρήση του μοντέλου του Skalak για το καταστατικό νόμο τάσεων – παραμορφώσεων, καθώς και η ανάπτυξη τρισδιάστατου αριθμητικού μοντέλου συμπεριλαμβανομένης της αντίστασης της μεμβράνης σε κάμψη θα ολοκληρώσει τη μελέτη της δυναμικής μίας μικροφυσαλίδας.

### **Ευχαριστίες**

Η εργασία αυτή χρηματοδοτήθηκε από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ) και από το ερευνητικό πρόγραμμα «ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ» του ΥΠΕΠΘ.



## Βιβλιογραφία

- [1] A. Bouakaz, P.J. A. Frinking, N. de Jong, and N. Bom. Noninvasive measurement of the hydrostatic pressure in a fluid-filled cavity based on the disappearance time of micrometer – sized free gas bubbles. *Ultrasound Med. Biol.*, 25:1407-1415, 1999.
- [2] S. Hilgenfeldt, D.Lohse, and M. Zomack. Sound scattering and localized heat deposition of pulse-driven microbubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 107:3530-3539,2000
- [3] Stefanos Theoharis, Florentia Fostira, Andrew George, Martin Blomley. Optison Enhances gene delivery by increasing the uptake of plasmid DNA by cells. *The Tenth European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging. January 2005*
- [4] V. Rouffiac, JS. Duret, P. Opolon, P. Péronneau, A. Roche. A new high intensity focused ultrasound (HIFU) system for tumor treatment and real – time control by Doppler sonography. Ex vivo and in vivo investigations. *The Tenth European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging. January 2005*
- [5] N. de Jong, A. Bouakaz, and C.T. Lancée. Higher harmonics of vibrating gas filled microspheres. Part one: Simulations, *Ultrasonics*, 32:447-453, 1994.
- [6] Prosperetti A. Thermal effects and damping mechanisms in forced radial oscillations of gas – bubbles in liquids. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1977
- [7] C.C. Church. The effects of an elastic solid surface layer on the radial pulsations of gas bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97:1510-1521, 1995
- [8] D. B. Khismatullin and A. Nadim. Radial oscillations of encapsulated microbubbles. *Phys. Fluids*, Vol. 14, No. 10, October 2002
- [9] James E. Chomas, Paul A. Dayton, Donovan May, and John Allen. Optical observation of contrast agent destruction. *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 77, No. 7, 14 August 2000
- [10] M. S. Plesset. On the stability of fluid flows with spherical symmetry. *Journal Of Applied Physics. Volume 25, Number 1, January 1954*

- [11] Prosperetti A. Viscous effects on perturbed spherical flows. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1977
- [12] Hilgenfeldt S, Lohse D, Brenner MP. Phase diagrams for sonoluminescing bubbles. *Physics of Fluids*, 1996
- [13] Hao Y, Prosperetti A The dynamics of vapor bubbles in acoustic pressure fields. *Physics of Fluids*, 1999
- [14] Brenner Mp, Lohse D, Dupont Tf. Bubble shape oscillations and the onset of sonoluminescence. *Physical Review Letters*, 1995
- [15] Carl M. Bender, Steven A. Orszag. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. *McGraw-Hill Book Company*, 1978
- [16] Hall P, Seminara G. Non-Linear oscillations of non-spherical cavitation bubbles in acoustic fields. *J. Fluid Mech.*(1980) Vol. 101, pp. 423-444
- [17] Feng Zc, Leal Lg. Bifurcation and chaos in shape and volume oscillations of a periodically driven bubble with 2-to-one internal resonance. *J. Fluid Mech.*(1994)
- [18] C. Pozrikidis. Effect of membrane bending stiffness on the deformation of capsules in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* (2001), vol.440, pp. 269-291
- [19] E.Lac, N. A. Pelekasis, D. Barthès-Biesel. Spherical capsules in three-dimensional unbounded Stokes flows: effect of the membrane constitutive law and onset of buckling. *J. Fluid Mech.*
- [20] N. A. Pelekasis, J. A. Tsamopoulos & G. D. Manolis. A hybrid finite-boundary element method for inviscid flows with free surface. *J. Comp. Phys.* 101(2), 231-251 (1992)
- [21] David Leppinen and John R. Lister. Capillary pinch-off in inviscid fluids. *Physics of Fluids*, volume15, number 2, January 2003
- [22] Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells. *McGraw-Hill Companies*,1964
- [23] Sboros, V., MacDonald, V. A., Pye, S. D., Moran, C. M., Gomatam, J. & McDicken, W. N. 2002. The dependence of ultrasound contrast agents backscatter on acoustic pressure: Theory versus experiment. *Ultrasonics*, 40, 579-583.
- [24] Joseph B. Keller and Michael Miksis. Bubble oscillations of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.* 68(2), Aug. 1980

- [25] Pozrikidis, C. 1992 Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow. *Cambridge University Press*.
- [26] A. Diaz, D. Barthès-Biesel, N. A. Pelekasis. Effect of membrane viscosity on the dynamic response of an axisymmetric capsule. *Physics of Fluids*, volume 13, number 12, December 2001
- [27] Jean – Marie Gorce, Marcel Arditi, and Michel Schneider. Influence of Bubble Size Distribution on the Echogenicity of Ultrasound Contrast Agents. A Study of SonoVue™. *Investigative Radiology*, volume 35, number 11, 661-671 (2000)
- [28] Pelekasis, N. A. A study on Drop and Bubble Dynamics via a Hybrid Boundary Element - Finite Element Methodology. *Ph.D Thesis submitted to the Chemical Engineering Department of SUNY Buffalo, 1991*
- [29] Lundgren T.S., Mansour N.N. Oscillations of drops in zero gravity with weak viscous effects. *J. Fluid Mech.* 194, 479-510, 1988
- [30] Rune Hansen, Bjorn Angelsen, Peter Burns, Ayache Bouakaz, Jerome Borsboom, Michel Versluis, Nico de Jong. Radial modulation imaging. *The Tenth European Symposium on Ultrasound Contrast Imaging. January 2005*